

## Module Second Order ODE: Inhomogeneous case

### 비동차 방정식의 특수해

미분방정식  $y'' + Ay' + By = f(t)$ 에서  $f(t) \neq 0$  경우를 비동차방정식이라고 한다.

실제 2계 선형 미분방정식을 이용하여 어떤 시스템을 모델링 한 경우 함수  $f(t)$ 는 외부로 부터 시스템에 전해지는 일종의 자극 같은 것이다.

$f(t)=0$  인 경우에 얻은 해가 있는데 이 해는 순전히 주어진 시스템 자체에만 의존한다. 만약 이 시스템에 외부로 부터 자극이 주어지면 자극에 대한 **시스템의 반응이 추가** 되어야 한다.

이를 특수해(Particular solution)이라고 부른다.

비동차방정식의 일반해는 동차방정식의 일반해  $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ 에다 한 개의 특수해  $y_p(t)$ 를 더해서 얻어진다.

따라서  $y'' + Ay' + By = f(t)$ 의 일반해는

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

가 된다.

-----  
**1) The method of undetermined coefficients.**

보기)  $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$ 의 특수해를 구하시오.

우변의 함수를 보면 삼각함수이기 때문에 특수해는 같은 유형의 함수일 것이다.

특수해의 후보로  $y = A \cos 2t + B \sin 2t$ 를 대입해보면

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= -4A \cos 2t - 4B \sin 2t \\ &\quad + 5(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) \end{aligned}$$

이 식이 성립하려면 A와 B는  $+6(A \cos 2t + B \sin 2t) = \cos 2t$ .

$$\begin{cases} -4A + 10B + 6A = 1 & \rightarrow & 2A + 10B = 1 \\ -4B - 10A + 6B = 0 & \rightarrow & -10A + 2B = 0 \end{cases}$$

를 만족해야 한다. 이로부터 한 개의 특수해

$$y_p = \frac{1}{52} \cos 2t + \frac{5}{52} \sin 2t$$

을 얻을 수 있다.

보기)  $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$ 의 일반해를 구하시오.

-동차의 경우 일반해

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

-방정식의 특수해는

$$y_p = \frac{1}{52} \cos 2t + \frac{5}{52} \sin 2t$$

따라서 방정식의 일반해는

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{52} \cos 2t + \frac{5}{52} \sin 2t$$

가 된다.

만약 초깃값 문제  $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$ ,  $y(\pi) = 0$ ,  $y'(\pi) = 0$ 의 해를 구한다면

$$y(\pi) = C_1 e^{-2\pi} + C_2 e^{-3\pi} + \frac{1}{52} = 0$$

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{2}{52} \sin 2t + \frac{10}{52} \cos 2t$$

$$\Rightarrow y'(0) = -2C_1 e^{-2\pi} - 3C_2 e^{-3\pi} + \frac{10}{52} = 0$$

특수해를 구하는 문제를 더 생각해보자.

보기)

$$y'' - 4y = 8t^2 - 2t$$

우변의 함수가 다항함수이기 때문에 특수해는 다항함수임을 짐작할 수 있다

$$y_p = at^2 + bt + c$$

$$y_p'' - 4y_p = 2a - 4(at^2 + bt + c) = -4a^2 - 4bt + 2a - 4c = 8t^2 - 2t$$

$$a = -2, b = 1/2, 2a - 4c = 0 \Rightarrow c = -1$$

보기)

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{2t}$$

우변의 함수가 지수함수이기 때문에 특수해는 지수함수임을 짐작할 수 있다

$$y_p = ae^{2t}$$

보기  $y'' + 2y' - 3y = 8e^t$

$$y_p = ae^t$$

$ae^t + 2ae^t - 3ae^t = 0 \neq 8e^t$  왜 작동하지 않는가?

특성방정식  $\Rightarrow r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1) = 0 \Rightarrow r = -3, 1$

$e^t$ 는 동차방정식의 해이다.

$y_p = ate^t$  을 시도.

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= a(2e^t + te^t + 2(e^t + te^t) - 3te^t) = 4ae^t = 8e^t \\ \Rightarrow 4a &= 8 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

보기)

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3t}$$

$y_p = ae^{3t}$  시도.  $a(9 - 6 \times 3 + 9)e^{3t} = 0$

특성방정식  $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0 \Rightarrow y = e^{3t}$ 는 동차방정식의 해.

위의 경우처럼  $y_p = ate^{3t}$ 을 시도한다면?

이 또한 동차방정식의 해  $\Rightarrow$  방정식에 대입하면 좌변이 0이 됨

(IDEA)  $y_p = at^2e^{3t}$  을 시도

$$y_p' = a(2t + 3t^2)e^{3t}$$

$$y_p'' = a(2 + 6t)e^{3t} + 3a(2t + 3t^2)e^{3t} = a(2 + 12t + 9t^2)e^{3t}$$

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 9y_p &= a(2 + 12t + 9t^2 - 6(2t + 3t^2) + 9t^2)e^{3t} = 2ae^{3t} = 5e^{3t} \\ \Rightarrow a &= 5/2 \end{aligned}$$

**2) Method of variation of parameters. (매개변수 변화법)**

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

$$y_p' = u'y_1 + v'y_2 + uy_1' + vy_2'$$

Impose condition  $u'y_1 + v'y_2 = 0$

$$y_p' = uy_1' + vy_2'$$

$$\begin{aligned}
y_p'' &= u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2'' \\
y_p'' + py_p' + qy_p &= u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2'' + puy_1' + pvy_2' + quy_1 + qvy_2 \\
&= u'y_1' + v'y_2' + u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= u'y_1' + v'y_2' = f
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-y_2 f}{W} \\ \frac{y_1 f}{W} \end{bmatrix}$$

Ex)

$$y'' + 4y = \sec x, \quad -\frac{2}{4} < x < \frac{2}{4}$$

$$\text{Characteristic equation: } \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i \sin(2x)$$

$$y_1 = \cos(2x), \quad y_2 = \sin(2x)$$

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} \\
&= 2(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)) = 2
\end{aligned}$$

$$u' = -\frac{1}{2} \sin(2x) \sec x = -\sin x$$

$$\begin{aligned}
v' &= \frac{1}{2} \cos(2x) \sec x = \frac{1}{2} [2 \cos^2 x - 1] \sec x \\
&= \frac{1}{2} [2 \cos x - \sec x]
\end{aligned}$$

$$u(x) = \cos x$$

$$v(x) = \sin x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x|$$

$$y_p = \cos x \cos(2x) + (\sin x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x|) \sin(2x)$$

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + y_p$$

## 2) Variation of parameters.

Ex)

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda = 2$$

$$e^{2x}, xe^{2x}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x+1)e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x+1)e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(x+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{1+2x-2x} \begin{bmatrix} 1+2x & -x \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x(x+1) \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = - \int (x^2 + x) dx$$

$$u_2 = \int (x+1) dx$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = - \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{2x} + \left( \frac{1}{2} x^2 + x \right) x e^{2x}$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x^2 \right] e^{2x}$$

$$= \left( \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{2x}$$

General solution  $y = (C_1 + C_2)e^{2x} + \left( \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{2x}$

### 3) Variable coefficient.

Ex)

$$t^2 y'' - 2y = 4t^2 - 3 \quad (t > 0)$$

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 4 - \frac{3}{t^2} = f$$

$$y_1 = t^2, y_2 = t^{-1}$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1 = - \int \frac{y_2}{W} f dt$$

$$u_2 = \int \frac{y_1}{W} f dx$$

$$W = \begin{vmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$