

Module Second Order ODE: homogeneous case

1. 2계 미분방정식의 예

1) 뉴턴이 생각한 물리학 문제

Free fall acceleration:

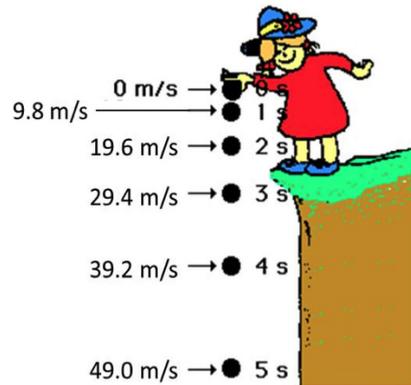


그림 1

Question) 실험적으로 확립된 갈릴레이의 법칙을 수학적으로 설명할 수 있을까? (낙하 거리는 시간의 제곱에 비례 한다.)

공이 움직이기 시작하여 t 초 후의 높이를 $y=y(t)$ 라 하고 공의 질량을 m 이라고 하자. 뉴턴의 제 2 운동법칙과 중력의 법칙에 의하면

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

이다. 여기서 g 는 중력 가속도이다.

이것은 우리가 앞에서 살펴본 대로 일종의 미분방정식이다.

미지의 함수 $y=y(t)$ 는 어떤 함수일까?

먼저 $y=y(t)$ 의 일계 도함수를 $v(t)$ 라고 놓으면 미분방정식은

$$\frac{d}{dt}v(t) = -g$$

가 되는 미지의 함수 $v(t)$ 를 찾는 문제가 된다.

주어진 식을 t 에 대해서 적분하면 $v(t) = -gt + C_1$ 을 얻는다.

이제 이 식을 다시 $y=y(t)$ 에 대한 식으로 바꾸면

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

가 되고 $y=y(t)$ 는 미분해서 일차함수가 되는 함수이다.

이 식의 양변을 t 에 대해서 적분하면 $y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ (자유낙하를 설명하는 미분방정식의 일반해)가 된다.

여기서 정해지지 않은 상수 C_1, C_2 는 어떻게 결정할 수 있을까?

$y(0) = C_2$ 가 되는 것을 볼 수 있는데 이는 공의 최초의 높이 즉, 탑의 높이 h 이다.

한편 $v(t) = -gt + C_1$ 이므로 $v(0) = C_1$ 가 되는데 $v(t)$ 라는 것은 높이의 시간에 대한 변화율 즉 속도이다. 따라서 $v(0) = C_1$ 는 최초의 속도임.

2. 2계 선형 미분방정식(2nd order linear differential equation)

(1) 기본 개념과 용어

2계 선형 미분방정식이란 미지의 함수 $y=y(t)$ 가 만족하는 다음과 같은 방정식이다.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t).$$

선형이란 말은 좌변의 식이 y, y', y'' 에 대해서 일차식이 되기에 붙은 이름이다.

*선형의 좋은 점은 가령 $f(t)=0$ 인 경우 $y_1(t), y_2(t)$ 가 각각 미분방정식의 해일 때 임의의 상수 α, β 에 대해 $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ (y_1 과 y_2 의 일차 결합 Linear combination)도 해가 되는 것이다.

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha(y_1'' + py_1' + qy_1) + \beta(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

\Rightarrow

1계 미분방정식에서는 미지 함수의 초기 값을 정해주는 것으로 충분했지만 2계 미분방정식은 두 번 미분한 함수에 대한 식이므로 미지함수의 1계 미분에 대한 초기 값도 정해주어야 한다. 즉 $y(t_0) = A, y'(t_0) = B$ 형태의 초기 조건(Initial condition)을 주어야 한다.

정리하면 2계 선형미분방정식의 **초깃값문제(Initial Value Problem)** 는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t)$$

$$y(t_0) = A, y'(t_0) = B$$

GOAL) 2계 선형 미분방정식의 일반해(General solution)를 어떻게 구할 것인가?

보기 1. 2계 선형 미분방정식 $y'' = y$ 의 해를 구해보자.

만약 함수 $y = y(t)$ 가 1계 미분방정식 $y' = y$ 를 만족하면 $y'' = (y')' = y' = y$ 이므로 본래의 미분방정식의 해가 된다. $y = e^t$ 가 바로 그런 함수.

한편 $y = y(t)$ 가 $y' = -y$ 를 만족하면 $y'' = (y')' = (-y)' = -y' = -(-y) = y$ 가 되므로 마찬가지로 본래의 미분방정식의 해가 된다. $y = e^{-t}$ 가 $y' = -y$ 의 해가 된다.

=> 방정식 $y'' = y$ 의 해 $y = e^t$ 와 $y = e^{-t}$ 는 기본적으로 다른 해이다.

=> 두 번째 함수는 첫 번째 함수의 상수 배가 아니기 때문이다.

그런 경우 두 해가 일차 독립(Linearly independent)이라고 한다.

방정식 $y'' = y$ 가 갖는 선형성 때문에 $y = Ae^t + Be^{-t}$ 도 해가 된다. 이와 같이 적분 상수를 포함하는 해를 미분방정식의 **일반해(General solution)**라고 한다.

2계 선형 미분방정식을 푼다고 할 때는 일반해를 구하는 것을 의미한다.

일반해는 일차 독립인 두 개의 해의 선형결합 (또는 일차결합)으로 주어진다.

(2) 상수계수의 2계 선형 미분방정식

2계 선형 미분방정식에서 계수 함수가 상수인 경우에 일반해를 구하는 것을 알아보자. 계수가 상수인 경우는 $y'' + Ay' + By = f(t)$ 와 같이 쓸 수 있다. 여기서 A, B는 상수이다.

*동차(homogeneous) 의 경우

먼저 $f(t) = 0$ 인 경우 이 때 이 방정식을 동차 방정식이라고 한다.

동차방정식은 $y'' + Ay' + By = 0$ 꼴이다.

일반해 ?

앞의 보기에서 살펴본 것처럼 지수함수가 해가 될 것처럼 보인다. 정해지지 않은 상수 r 에 대

해 함수 $y = e^{rt}$ 를 방정식에 대입해보면

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + A\frac{d}{dt} + B\right)e^{rt} = (r^2 + Ar + B)e^{rt} = 0$$

가 된다. 이로부터 상수 r 이 만족해야할 조건

$$r^2 + Ar + B = 0$$

을 얻게 된다. 이를 주어진 미분방정식의 특성방정식(Characteristic equation)이라고 부른다.

이 특성방정식은 다음 세 가지 유형의 근을 갖는다.

- (1) 두 개의 서로 다른 실수 근
- (2) 한 개의 중복 실수 근
- (3) 두 개의 복소수 근 (두 근은 쥘레 복소수 관계임)

이제 다음 보기에서 세 가지 유형을 각각 살펴보자.

Ex) (첫 번째 유형) 미분 방정식 $y'' + 5y' + 6y = 0$ 의 해를 구해보자. 특성방정식 $r^2 + 5r + 6 = 0$ 은 두 실 근 $r = -2, -3$ 을 가지므로 미분방정식은 e^{-2t}, e^{-3t} 를 해로 갖는다. 이 두 해는 일차독립이므로 방정식의 일반해는

$$y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$$

이다.

Ex) (두 번째 유형) 미분 방정식 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 의 해를 구해보자. 특성방정식 $r^2 + 4r + 4 = 0$ 은 중근 $r = -2$ 를 갖는다. 따라서 e^{-2t} 가 해가 된다.

두 번째 해는 어떻게 구할까?

이처럼 중근이 나오는 경우 두 번째 해는 지금 얻은 해에 적당한 함수를 곱하여 얻는다.

실제로 te^{-2t} 가 해가 된다. 해 e^{-2t} 와 te^{-2t} 는 일차독립이다. 따라서 일반해는

$$y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} = (c_1 + c_2t)e^{-2t}$$

이다.

$y = u(t)e^{-2t}$ 가 해가 되려면?

$$\begin{aligned} (ue^{-2t})'' + 4(ue^{-2t})' + 4ue^{-2t} &= 0 \\ (u'' + 2u'(-2) + (-2)^2u)e^{-2t} + 4(u' - 2u)e^{-2t} + 4ue^{-2t} & \\ = (u'' - 4u' + 4u' + 0u)e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = at + b$$

연습 1) $y = te^{-2t}$ 가 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 의 해가 됨을 보여라.

Ex) (세 번째 유형) 미분방정식 $y'' + 2y' + 2y = 0$ 의 해를 구해보자.

특성방정식 $r^2 + 2r + 2 = 0$ 은 $(r + 1)^2 + 1 = 0$

=> 두 개의 복소수 근 $r = -1 + i, -1 - i$ 을 갖는다.

따라서 형식적으로는 두 해 $e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}$ 을 갖는다.

오일러의 항등식

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$e^{(-1+i)t} = e^{-t+it} = e^{-t}e^{it} = e^{-t}(\cos t + i \sin t)$$

$$e^{(-1-i)t} = e^{-t-it} = e^{-t}(\cos(-t) + i \sin(-t)) = e^{-t}(\cos t - i \sin t)$$

이 두 식의 합과 차는 다음과 같다.

$$e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t} = 2e^{-t}\cos t,$$

$$e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t} = 2ie^{-t}\sin t$$

동차인 선형미분방정식의 두 해를 더하거나 빼거나 상수를 곱한 것들도 원래의 미분방정식의 해가 되므로 $e^{-t}\cos t$ 와 $e^{-t}\sin t$ 도 원래의 방정식의 해가 된다(이를 확인하여 보아라!).

(이 두 함수는 일차독립이다.)

따라서

$$y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$$

는 미분방정식의 일반해가 된다.

일반적으로 미분방정식 $y'' + Ay' + By = 0$ 의 특성방정식이 복소수 근을 가질 경우, 즉

$$r^2 + Ar + B = 0 \Rightarrow r = \alpha \pm i\beta$$

인 경우 일반해는

$$y = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

가 된다.

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t \Rightarrow \text{실수부와 허수부}$$