Module Transformation technique

치환에 의한 해법

1계 미방 중 선형이 아닌 것에 대한 일반적인 해법은 없으나 특별한 경우 변수를 적절하게 치환함으로써 선형미방이나 변수분리형으로 변환 할 수 있다.

1) 동차방정식(Homogeneous equation.)

$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 우변이 $\frac{y}{x}$의 함수로 주어지는 경우 변수분리형 방정식으로 치환이 가능하다.

$$u = \frac{y}{x} \text{라 놓으면}$$

$$y = xu,\ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad \text{변수 분리형}$$

Ex) Find general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

By transform $u = \frac{y}{x}$, the equation is changed into $u = x\frac{dy}{dx} = \frac{1+u}{1-u}$.

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan(u) - \frac{1}{2} ln(1+u^2) = \ln|x| + C$$

$$\arctan(\frac{y}{x}) - \ln\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C$$

For $\frac{y}{x}$ is very small, by $\arctan x \approx x, \ln(1+x) \approx x$, the equation is approximately

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C$$

$$y \approx x(1 \pm \sqrt{1 - 2(\ln|x| + C)})$$

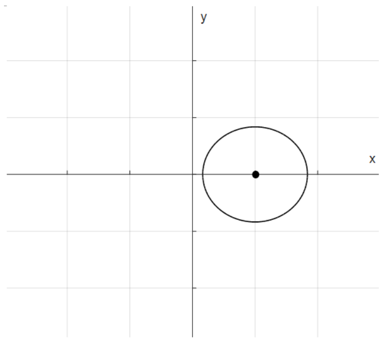

그림 1

2) 베르누이 방정식

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=R(x)y^{\alpha},\ \ (\alpha\neq\ 1,0)$$

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=R(x)$$

$$v=y^{1-\alpha}\text{로 치환}$$

$$\frac{dv}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dv}{dx}+p(x)v=R(x)\ \text{선형 방정식}$$

Ex) Find general solution of $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=3x^2y^3$.

$$y^{-3}y'+\frac{1}{x}y^{-2}=3x^2\ \ (y\neq\ 0)$$

$$v=y^{-2},v'=-2y^{-3}y'$$

$$-\frac{1}{2}v'+\frac{1}{x}v=3x^2$$

$$v=-6x^3+Cx^2$$

$$y=(Cx^2+6x^3)^{-1/2}$$

응용문제) 40피트 길이의 체인이 있다. 체인은 피트 당 ρ파운드의 무게를 갖는다. 체인은 천장 위에 있고 10피트 길이의 일부가 구멍을 통해 풀려나와있다. 체인이 모두 풀렸을 때 체인이 떨어지는 속도를 구하라.

체인이 풀려난 길이를 x라 하고 그 때 체인이 떨어지는 속도를 v라 하면 우리가 알기 원하는 함수는 $v=v(x)$이다. 이 함수에 대한 미분방정식을 유도한다.

(1) Chain piling on the floor

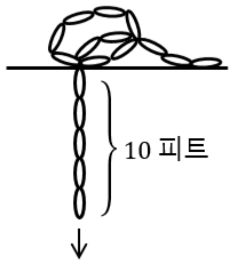

그림 2

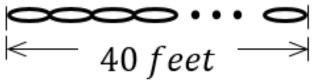

그림 3

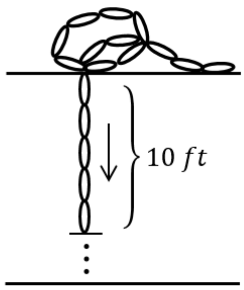

그림 4

$$F = \frac{d}{dt} mv$$
$$= \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt}$$
$$F = mg = x\rho$$

Chain: weight ρ pounds per foot

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dm}{dt} g = v\rho$$

$$\frac{\rho}{g} v^2 + mv\frac{dv}{dx} = x\rho$$

$$\frac{x}{g}\frac{dv}{dx} + \frac{\rho}{g} v = x\rho v^{-1}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = g v^{-1}$$

(2) Bernoulli equation.

$$v(x)^2 = \frac{64}{3}\left[x - \frac{1000}{x^2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
v(x)^2 &= \frac{64}{3}\left[40-\frac{10}{16}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[64\times 40-40\right] \\
&= \frac{40}{3}\times 63 = 40\times 21
\end{aligned}
$$

$$v(40) = 2\times\sqrt{210} \approx \; 29\,ft/s$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x=10}^{x=40} dt = \int_{x=10}^{x=40}\frac{dt}{dx}dx = \int_{x=10}^{x=40}\frac{dx}{\sqrt{\frac{64}{30}}\sqrt{x-\frac{1000}{x^2}}} \\
= \sqrt{\frac{3}{64}}\int_{10}^{40}\frac{x}{\sqrt{x^3-10^3}}dx
\end{aligned}
$$