Module Application of First Order ODE - 변수분리형과 선형방정식의 응용

1계 미방을 이용한 모델링 문제

1) 인구 성장 모델

배양기에 있는 박테리아 수가 시간에 따라 증가한다. 성장 모델을 이용하여 언제 박테리아 수가 4000 마리가 되는지 예측하라.

$$\begin{cases} 3\text{시간후}400\text{마리} \\ 10\text{시간후}2000\text{마리} \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

변수 분리형 $\int \frac{1}{P} dP = \int K dt$

$$\ln|P| = Kt + C$$
$$|P| = e^{Kt+C}$$
$$P = (\pm e^{C})e^{Kt}$$
$$\text{Set } \pm e^{C} \equiv A$$
$$P = Ae^{Kt}$$

$A = P(0)$ 초기 박테리아 수

주어진 정보로부터 P_0와 K값을 구해보자.

$$P(3) = P_0 e^{3K} = 400$$
$$P(10) = P_0 e^{10K} = 2000$$
$$e^{7K} = 5,\ 7K = \ln 5,\ K = \frac{1}{7}\ln 5$$
$$P_0 = 400e^{-3K}$$
$$= 400e^{-\frac{3}{7}ln5}$$
$$= 400\frac{1}{\sqrt{5^3}} ≒ 400 \times 0.5 ≒ 200$$
$$P(t) = 4000 = 400e^{-3K}e^{Kt}$$
$$10 = e^{K(t-3)}$$
$$\ln 10 = K(t-3)$$
$$t = 3 + \frac{1}{K}\ln 10$$
$$= 3 + 7\frac{\ln 10}{\ln 5} ≒ 14\ hr$$

After about 3 hour, $P = 4000$

2) 뉴턴의 냉각 1가열 법칙

초기 온도가 T_0인 뜨거운 물체를 훨씬 온도가 낮은 공간 (이 곳의 온도를 A라 하자)에 두었다. 시간이 지남에 따라 이 물체의 온도는 감소하게 된다. 이 물체의 온도 변화를 설명하라.

$$T(t) = \text{시간}\, t(\text{분})\,\text{후 물체의 온도}$$

뉴턴의 냉각 법칙에 따르면 물체의 온도 변화율(이 경우 감소율)은 물체의 온도와 주변 온도의 차이에 비례한다.

식으로 써보면 아래와 같다.

$$\frac{dT}{dt} = -K(T-A)$$

여기서 K는 양의 비례상수이다.

$$T(0) = T_0 \text{ 초기조건}$$

변수 분리한 미분 방정식임을 알 수 있다. 따라서 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int \frac{1}{T-A} dT = \int -K dt$$
$$\ln|T-A| = -Kt + C$$
$$T - A = \pm e^c e^{-Kt}$$
$$T(t) = A + Ce^{-Kt}$$

Ex) (오븐에서 닭고기 가열하기) Newton's heating law.

A 4 lb roast, initial temperature = $50^\circ F$, is places in a $375^\circ F$ oven at 5:00 pm. After 75 min, it is followed that temperature of roast $T = 125^\circ F$, when will the roast be $150^\circ F$?

Sol)

$$\frac{dT}{dt} = K(375 - T)$$
$$\int \frac{dT}{375 - T} = \int K dt$$
$$-\ln(375 - T) = Kt + C$$
$$375 - T = Be^{-Kt}$$
$$T(t) = 375 - Be^{-Kt}$$
$$T(0) = 375 - B = 50$$
$$B = 325$$

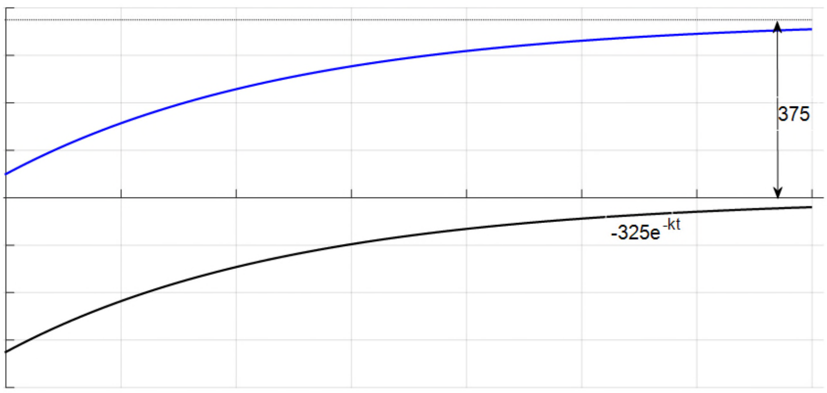

그림 1

To decide K

$$125 = 375 - 325e^{-75K}$$

$$e^{-75K} = \ln\frac{50}{65} = \ln\frac{10}{13}$$

$$K = -\frac{1}{75}\ln\frac{10}{13} = \frac{1}{75}\ln\frac{13}{10} = \frac{1}{75}\ln\left(1+\frac{3}{10}\right) \approx \frac{1}{250}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$T(t) = 375 - 325e^{-\frac{1}{250}t} \ (t : \mathrm{min})$$

$$T(t) = 150 \qquad t = ?$$

$$150 = 375 - 325e^{-\frac{1}{250}t}$$

$$e^{-\frac{t}{250}} = \frac{225}{325}$$

$$-\frac{t}{250} = \ln\frac{225}{325}$$

$$t = 250\ln\frac{650}{450} = 250\ln\frac{13}{9}$$

$$= 250\ln\left(1+\frac{4}{9}\right) \approx 250 \times \frac{4}{9} = 11\,\mathrm{min}$$

3) 1계 선형 미분방정식을 이용한 모델링의 예

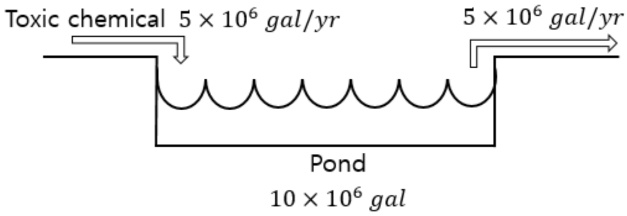

그림 2

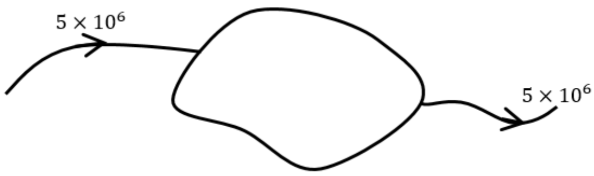

그림 3

Consider a pond that initially contains 10 million gal of fresh water. Water containing an undesirable chemical flows into the pond at the rate of 5 million gal/yr, and the mixture in the pond flows out at the same rate. The concentration $\gamma(t)$ if chemical in the incoming water varies periodically with time according to the expression $\gamma(t) = 2 + \sin(2t)\ g/gal$. construct a mathematical model of this flow process and determine the amount of chemical in the pond at any time. plot the solution and describe in words the effect the effect of the variation in the incoming concentration.

초기에 1천만 갤런의 깨끗한 물이 들어있는 연못이 있다. 원치 않는 화학 물질을 포함한 물은 연못에 500만 gal/yr의 속도로 흘러들어 가고, 연못의 혼합물은 같은 비율로 흘러나온다. 유입된 물의 화학 물질의 농도가 $\gamma(t) = 2 + \sin(2t)\ g/gal$ 의 식에 따라 주기적으로 변한다고 할 때, 이 유동 과정의 수학적 모델을 세우고 시간에 따른 연못의 화학 물질의 양을 결정하시오. 답을 그래프로 그리고, 유입되는 농도 변화의 효과를 설명하시오.

Concentration of chemical : $\gamma(t) = 2 + \sin(2t)\ gal/yr$

Set $Q(t)$ =Amount of chemical in the pond at any time (t is measured in year),

임의의 순간 t에서 Δr 만큼 시간이 흐르는 동안 연못의 화학 물질의 양의 변화를 살펴보자.

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$$
$$= (\,amount\ \ of\ chemical\ added) - (\,amount\ of\ chemical\ lost)$$

$$\approx (\Delta t\ yr)\times(5\times10^{6}\ gal/yr)\times(\gamma(t)\ \ g/gal) - (\Delta t\ yr)\times(5\times10^{6}\ gal/yr)\times(\frac{Q(t)}{10^{7}}\ g/gal)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}\approx 5\times10^{6}\gamma(t) - 5\times10^{6}\times10^{-7}Q(t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}=5\times10^{6}\gamma(t) - \frac{5}{10}Q(t)$$

연못 안의 화학물질의 양을 설명하는 미분방정식을 다음과 같이 얻게 된다.

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{5}{10}Q(t)=5\times10^{6}(2+\sin(2t))$$

계산의 편의를 위해 Q를 다음과 같이 치환한다.

$$q=\frac{Q}{10^{6}}$$

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{2}q(t)=5(2+\sin(2t))$$

양변에 적분인자 $e^{\int (1/2)dt}=e^{\frac{1}{2}t}$을 곱한다.

$$(e^{\frac{1}{2}t}q)'=5e^{\frac{1}{2}t}(2+\sin(2t))$$

$$e^{\frac{1}{2}t}q=5\int (2e^{\frac{1}{2}t}+e^{\frac{1}{2}ts}\sin(2t))dt$$

$$=20e^{\frac{1}{2}t}+\frac{5e^{\frac{1}{2}t}}{\frac{1}{4}+4}(\frac{1}{2}\sin(2t)-2\cos(2t)+C)$$

우변의 적분은 다음 공식을 이용한다.

$$\int e^{at}\sin(bt)dt=\frac{e^{at}}{a^{2}+b^{2}}(a\cos(bt)-b\cos(bt))+C$$

따라서 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$q(t)=20+Ce^{-\frac{1}{2}t}+\frac{20}{17}(\frac{1}{2}\sin(2t)-2\cos(2t))$$

초기 조건으로 부터 C값을 구하면 다음과 같다.

$$q(0)=0$$

$$=20+C+\frac{20}{17}(0-2)$$

$$C=-20+\frac{40}{17}=20\frac{2-17}{17}=\frac{-15\times20}{17}=-\frac{300}{17}$$

초깃값 문제에 대한 최종 해는 다음과 같다.

$$q(t)=20-\frac{300}{17}e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{10}{17}\sin(2t)-\frac{40}{17}\cos(2t)$$

해에 있는 주기함수의 진폭을 구하기 위해 다음의 합성법을 사용한다.

$$\frac{10}{17}\sin(2t)-\frac{40}{17}\cos(2t)$$

$$=\frac{10}{17}(\sin(2t)-4\cos(2t))$$

$$=\frac{10}{17}\sqrt{1+16}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2t)-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2t)\right)$$

$$=\frac{10}{\sqrt{17}}(\sin(2t)\cos(\alpha)-\cos(2t)\sin(\alpha))$$

$$=\frac{10}{\sqrt{17}}\sin(2t-\alpha)$$

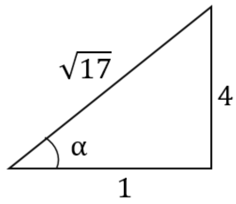

그림 4

진폭의 값은 대략 $\frac{10}{\sqrt{17}} \approx \frac{10}{\sqrt{16}}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5$ 가 된다.

해의 초기의 변화는 다음과 같은 근사를 통해 짐작할 수 있다. 시간 t가 0에 가까우면

$$q(t) \approx 20-\frac{40}{17}-\frac{300}{17}e^{-\frac{1}{2}t}$$
$$\approx \frac{300}{17}(1-e^{-\frac{1}{2}t})$$

그래프를 그려보면 아래와 같다.

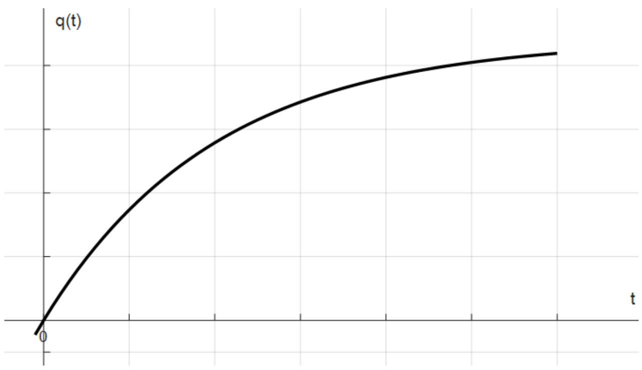

그림 5

시간이 많이 지난 후 해의 변화는 다음과 같다. $t\to\infty$로 놓으면 해는 대략 다음과 같은 모양이다.

$$q(t) \approx 20+\frac{10}{\sqrt{17}}\sin(2t-\alpha)$$

연못의 화학 물질의 양의 변화를 그래프로 표현하면 대략 다음과 같음을 알 수 있다.

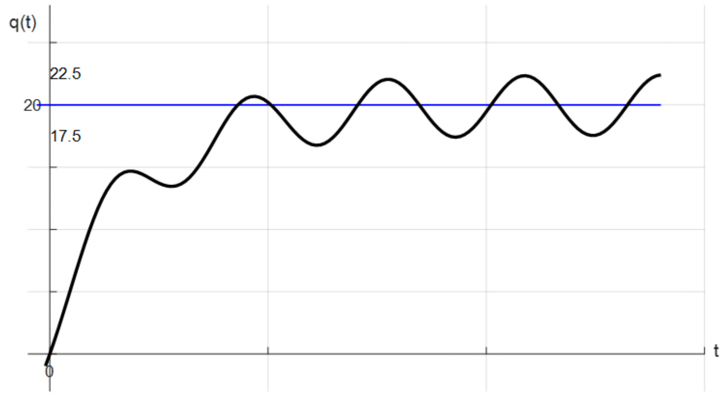

그림 6