Module First Order ODE - 선형방정식

1계 선형(Linear) 미분방정식

1) 1계 선형(Linear) 미분방정식의 해 구하기

$F(t,y,y')=0$ 1계 미분방정식

F가 y와 y'에 대해 선형 즉 1차식인 경우

$$F(t,y,y')=a(t)+b(t)y+c(t)y'=0$$

(표준형) $\dfrac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)$ (y'의 계수가 1이 되도록)

질문) 일반적인 1계 선형 미분방정식의 해를 어떻게 구하는가?

Ex) (해를 구하는 방법에 대해 아이디어 얻기)

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=t,\ (t>0)$$

양변에 t를 곱하면 $t\dfrac{dy}{dt}+y=t^2$

좌변을 $\dfrac{d}{dt}(ty)=(t)'y+t(y)'=y+t\dfrac{dy}{dt}$와 같이 쓸 수 있다.

원래의 미분 방정식은 $\dfrac{d}{dt}(ty)=t^2$

해를 구하려면 양변을 적분

$$\int \frac{d}{dt}(ty)dt=\int t^2dt$$

$$ty=\frac{1}{3}t^3+C$$

$$y=\frac{1}{3}t^2+\frac{C}{t},\ (t>0) \qquad (일반해)$$

2) 관찰을 일반화하기

주어진 1계 선형 미분방정식 $\dfrac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)$의 양변에 적당한 함수를 곱해서 좌변을 단일

함수의 미분으로 표현할 수 있으면 성공!

$$\mu(t)(\frac{dy}{dt}+P(t)y)=\mu(t)Q(t)$$

질문) 어떤 함수를 곱해야 할까? Multiplier가 만족해야할 조건은?

$$\mu(t)(\frac{dy}{dt}+P(t)y)=\frac{d}{dt}(\mu(t)y)$$

$\Rightarrow$

$$\mu y'+\mu' y=\mu y'+\mu P(t)y$$

$$\mu' y=\mu P(t)y$$

$$\mu'=P(t)\mu$$

Multiplier는 위의 미분방정식을 만족하는 함수여야 한다.

※ 변수분리형 방정식 : first order

$$\frac{dy}{dt}=f(t)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy=f(t)dt$$

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(t)dt$$

예를 들면

$$\frac{dy}{dt}=3y$$

$$\frac{1}{y}dy=3dt \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int 3dt$$

$$\ln|y|=3t+C$$

----

3) 어떻게 정당화가 가능한가?

$y=\phi(t)$가 해 라고 하자.

즉 $\frac{d\phi}{dt}=\phi'(t)=f(t)g(\phi(t))$

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int\frac{1}{g(\phi(t))}\phi'(t)dt=\int\frac{1}{g(\phi(t)}f(t)g(\phi(t))dt=\int f(t)dt$$

우리 문제로 돌아가서 multiplier 는 $\mu'=P(t)\mu$의 해 이다.

$$=> \frac{d\mu}{dt} = P(t)\mu$$

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int P(t)dt$$

$$\ln|\mu| = \int P(t)dt$$

$$\mu = \pm e^{\int P(t)dt}$$

이 함수를 **적분인자(Integrating factor)**라고 한다.

Ex) 미분방정식 $t\frac{dy}{dt} = t^2 + 3y,\ (t > 0)$의 일반해를 구하여라.

STEP 1) 먼저 방정식을 다음과 같이 표준형으로 쓴다.

$\frac{dy}{dt} - \frac{3}{t}y = t$

(여기서 $t > 0$인 영역을 생각하므로 y의 계수 함수는 잘 정의가 된다).

STEP 2) 적분인자를 찾는다. 적분인자는

$$e^{-\int \frac{3}{t}dt} = e^{-3\ln t} = e^{\ln t^{-3}} = t^{-3} \quad (t > 0)$$

가 된다.

STEP 3) 적분인자를 주어진 미분방정식의 표준형의 양변에 곱한다.

$$t^{-3}(y' - \frac{3}{t}y) = t^{-2}$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-3}y) = t^{-2}$$

을 얻는다. 양변을 적분하면 일반해는

$$t^{-3}y = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + C$$

$$y = -t^2 + Ct^3, (t > 0)$$

가 된다.

4) 초깃값 문제: Initial value problem

$t\dfrac{dy}{dt} = t^2 + 3y,\quad y(1) = 1$에 대한 초깃값 문제의 해를 구하여라.

풀이) y(1)=1이므로 t>0 에 대해 해를 구하는 것으로 충분하다.

위의 풀이로부터 일반해는 $y = -t^2 + Ct^3$.

초기조건 $y(1) = 1$로부터 $C = 2$를 얻는다.

초깃값 문제의 해는 $y = 2t^3 - t^2$이다.

Ex) 미분 방정식 $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{2}y = e^{t/3}$의 일반해를 구하시오.

$\Rightarrow$ 표준형으로 주어짐.

$$\text{적분인자} \Rightarrow \exp(\int \frac{1}{2}dt) = \exp(\frac{1}{2}t) = e^{t/2}$$

$$e^{t/2}(y' + 1/2y) = e^{t/2 + t/3}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = e^{5/6t}$$

$$e^{t/2}y = \frac{6}{5}e^{\frac{5}{6}t} + C$$

$$y = \frac{6}{5}e^{t/3} + Ce^{-t/2}$$

5) 응용문제

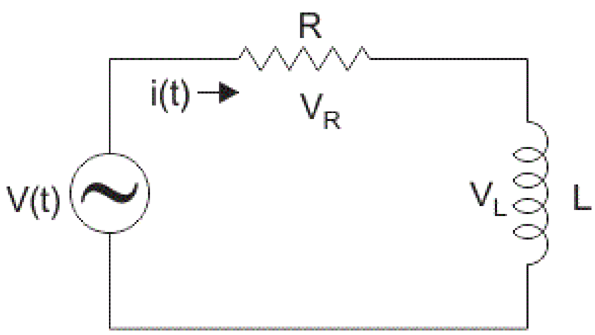

그림 1

RL-회로라고 불리는 전기회로는 저항과 코일로 이루어져 있고 전압을 공급하는 전원이 있다.

전원을 켰을 때 회로의 전류가 시간에 따라 어떻게 변하는지가 주 관심이다.

R= 저항값으로 상수

L= 인덕턴스로 상수 (코일이 얼마나 촘촘하게 감겨있는지 나타냄)

V=V(t) 회로에 공급되는 전압

I=I(t) 회로에 흐르는 전류

관계식은 키르히호프(Kirchhoff)의 법칙을 이용하여 얻을 수 있다.

키르히호프의 법칙

닫힌회로에서 공급되는 전원의 전압이 회로의 각 장치에서의 강하되는 전압의 총합과 같다

V=V_R + V_L

V_R =? and V_L=?

저항에서 강하되는 전압은 옴(Ohm)의 법칙에 따라 V_R =RI이 된다.

코일에서 강하되는 전압은 V_L= $L\frac{dI}{dt}$이다.

=> $L\frac{dI}{dt}+RI=V$ (1계 선형 미분방정식)

미분방정식의 해를 구하기

표준형: $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{V}{L}$

적분인자 $\mu=e^{\int \frac{R}{L}dt}=e^{\frac{R}{L}t}$

이를 미분방정식 양변에 곱하면

$$e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I\right)=\frac{1}{L}e^{\frac{R}{L}t}V$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}I\right)=\frac{1}{L}e^{\frac{R}{L}t}V$$

양변을 t에 대해 적분하면

$$e^{\frac{R}{L}t}I=\frac{1}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}V\,dt=\frac{V}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C$$

일반해는 $I(t)=\frac{V}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$

초기조건 $I(0)=I_0$ 을 이용하면 $I_0 = V/R + C$

=> 초깃값 문제에 대한 해는

$$I(t)=\frac{V}{R}+(I_0-\frac{V}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$$

흥미로운 점: 초기전류와 V/R 사이의 관계에 따라 전류의 변화가 다른 패턴을 보여준다.

(1) $I_0 < \frac{V}{R}$ 인 경우

$I(t)=\frac{V}{R}+(I_0-\frac{V}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$ 는 증가함수가 된다.

- 아래 그래프의 수평축은 시간을 나타내며 수직축은 전류를 나타낸다.

- 특별히 전류가 궁극적으로 V/R 향해 점점 증가하는 것을 알 수 있다.

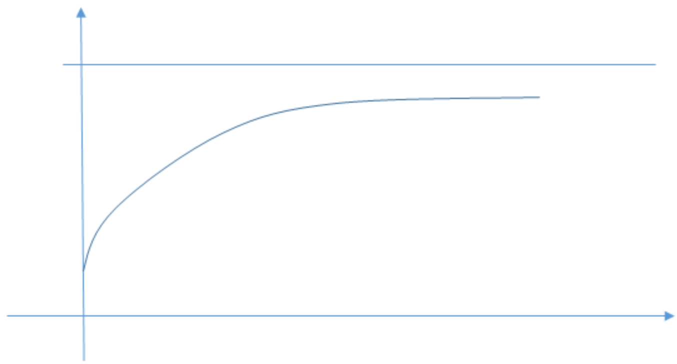

그림 2

(2) $I_0 > \frac{V}{R}$ 인 경우

$I(t)=\frac{V}{R}+(I_0-\frac{V}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$ 는 감소함수가 된다.

-전류는 시간이 지남에 따라서 V/R 향해 점점 감소

-해가 지수함수로 표현되어 있기 때문에 초기에 전류가 급격히 감소

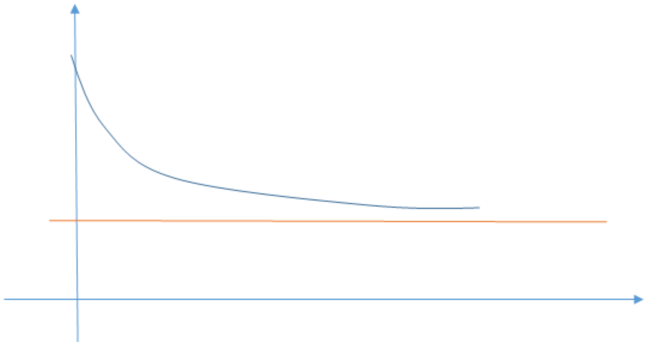

그림 3

Ex) 오븐에서 구운 감자를 막 식탁 위에 올려놓았다. 감자는 시간이 지나면서 식게 될 것이다. 먹기에 알맞게 식을 때까지 얼마나 기다려야 할까?

감자의 온도는 시간에 따라 변하는 함수로 $u=u(t)$라고 놓자.

뉴턴의 냉각 법칙

$$\frac{du}{dt}=-k(u-T)$$

T= 방안의 온도
$u_0 =$ 감자의 처음 온도

$$\frac{du}{dt}+ku=kT$$

$$e^{kt}(u'+ku)=kTe^{kt}$$

$$(e^{kt}u)'=kTe^{kt}$$

$$e^{kt}u=Te^{kt}+C$$

$$u=T+Ce^{-kt}$$

u(0)=T+C $=u_0$ => C= u_0-T

=> $u=T+(u_0-T)e^{-kt}$

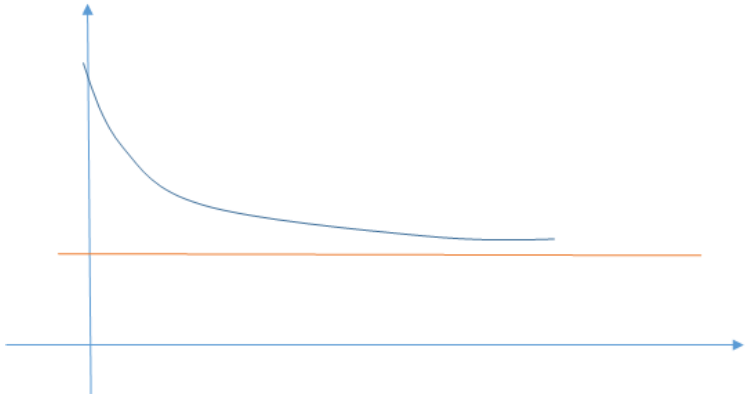

그림 4