Module First Order ODE - 변수분리형 방정식

1) 1계 미분방정식

$$F(x, y, y') = 0$$
$$y' = f(x, y)$$

2) 변수 분리형 방정식

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$
$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$
$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Ex)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{-x}$$
$$\frac{1}{y^2}dy = e^{-x}dx$$
$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int e^{-x}dx$$
$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + C$$
$$y = \frac{1}{C + e^{-x}}$$

방법은 어떻게 수학적으로 정량화되는가?

$y = \Phi(x)$을 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$의 해 라고 하자.

해를 식에 대입하면

$$\Phi'(x) = g(x)h(\Phi(x))$$
$$\int \frac{\Phi'(x)}{h(\Phi(x))}dx = \int g(x)dx$$

왼쪽의 식은 Φ를 포함하고 있고, 오른쪽의 식은 Φ를 포함하고 있지 않다.

왼쪽 적분을 계산하기 위해 치환적분법을 쓴다.

$$y = \Phi(x),\ \ dy = \Phi'(x)dx$$

$\int \frac{\Phi'(x)}{h(\Phi(x))}dx = \int \frac{1}{h(y)}dy$가 된다.

※ 해 잃어버림 현상

변수분리형 미분방정식의 일반해는 모든 해를 포함하지 않는 경우가 있다.

예) $\frac{dy}{dx}=y^2e^{-x}$

일반해 $y=\frac{1}{C+e^{-x}}$ $y=0$도 미분방정식의 해가 되지만 일반해에 어떤 C 값을 선택해도 $y=0$을 얻을 수 없다. 이와 같이 일반해를 얻는 과정에서 분실된 해를 특이해(Singular solution)라고 한다.

일반적으로 $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$에 대해 y_0가 $h(y)=0$의 근이 될 경우 상수 함수 $y=y_0$는 미분방정식의 해가 되는데, 이 상수해들이 특이해가 될 수 있다.

연습문제) $x^3\frac{dy}{dx}=2+y$는 특이해를 가지는가?

※ 변수분리형 미분방정식의 해는 일반적으로 음함수의 해로 주어진다.

Ex)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1-y^2}$$
$$\int(1-y^2)dy=\int x^2dx$$
$$y-\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{3}x^3+C$$
$$x^3+y^3-3y=C$$

곡선의 방정식을 정의한다.

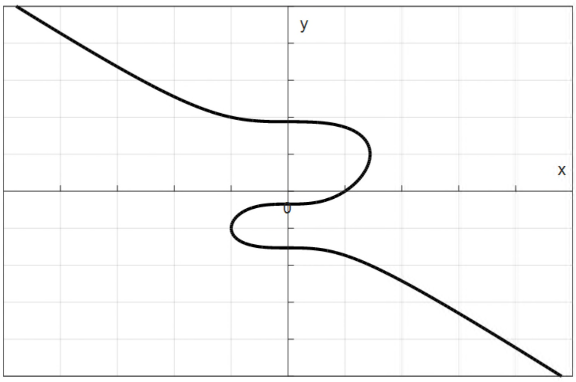

그림 1