Module 미분방정식 개요

1 미분방정식이란 무엇인가?

1) 인구 증가 모델

$P = P(t)$ 어떤 도시의 각 해의 인구를 나타낸다.

year	Population(thousand)
2000	100
2010	150
2020	250
...	...

$\frac{dP}{dt}$는 $P(t)$에 비례한다.

식으로 나타내면

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

어떤 함수 $P(t)$가 식을 만족할까?

$$P(t) = e^{Kt}$$

$$P(t) = Ce^{Kt}$$

C 를 결정하기 위해 $P(0) = C$

C는 초기 인구를 나타냄.

관계식이 일계 미분으로 표현된다. 이 경우 일계 미분방정식이라 부른다.

2) 자유낙하

$h(t) =$ 탑 위에서 떨어뜨린 공의 지면으로부터의 높이

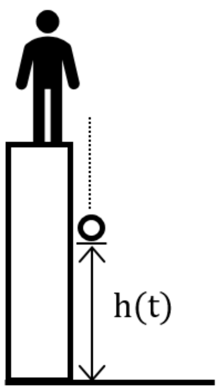

그림 1

뉴턴의 운동방정식 $F = ma$

$a =$ 가속도 $= \frac{dv}{da} = \frac{d}{dt}\frac{dh}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} =$ 높이(위치)함수의 시간에 대한 이계 미분

자유낙하에서 물체에 작용하는 힘 $= -mg$

g;중력 가속도

$$-mg = m\frac{d^2h}{dt^2}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g \qquad \text{이계 미분방정식}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g \qquad \text{일계 미분방정식}$$

$$v = -gt + C$$

$$C = v(0) = \text{초기 속도}$$

$$\frac{dh}{dt} = -gt + v(0)$$

$$h(0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + C_1$$

$$C_1 = h(0) = \text{초기 위치}$$

$$h(0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + h(0)$$

2. 일반적인 미분방정식에 대한 개론

1) 일반적인 형태

$$y = y(t)$$

$$F(s, y, y', y'', \cdots, y^{(n)} = 0)$$

Ex)

$$e^t + y^2 + y'y'' = 0$$

2) 선형 미분방정식과 비선형 미분방정식

F가 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$에 대해 일차식인 경우 선형 미분방정식이라 한다.

Ex)

$$e^t + (\sin t)g + 2y'' = 0$$

Ex) (비선형의 예)

$$y' = y^2$$

Ex) 비선형 미방의 예 (Logistic growth model)

$$\frac{dP}{dt} = (K - aP)P$$

K, a : 양의 상수

비례 상수가 인구에 대한 함수 일 때, 즉 인구가 증가함에 따라 상대적 증가율(=비례상수)이 감소하는 경우, 인구 증가율이 둔화되는 것을 표현함.

3) 근본적인 질문

1. 미분방정식은 항상 해를 가질까?
2. 미분방정식이 해를 갖는다면 초깃값이 정해지면 해도 하나로 정해질까?

질문 1에 대한 답변
예)

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+1=0$$

$y=y(t)$: 실숫값을 갖는 함수가면 해가 없다.

질문 2에 대한 답변
다음 초깃값 문제를 생각하자.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

Q) 초깃값 문제는 해가 존재한다면 항상 유일한 해를 갖는가?
Ex)

$$\frac{dy}{dt}=t\sqrt[4]{y}$$

$$y(0)=0$$

$y=0$는 IVP의 해가 된다.

$y=\dfrac{1}{16}t^4$도 IVP의 해가 된다.

두 해는 같은 초기 조건을 만족하는 서도 다른 해다.

정리

임의의 초기치 문제 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$ 에서

(t_0,y_0)을 중심으로 하는 사각형에서 $f(t,y)$와 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$가 연속이면, 주어진 초기치 문제는 유일한 해를 갖는다.

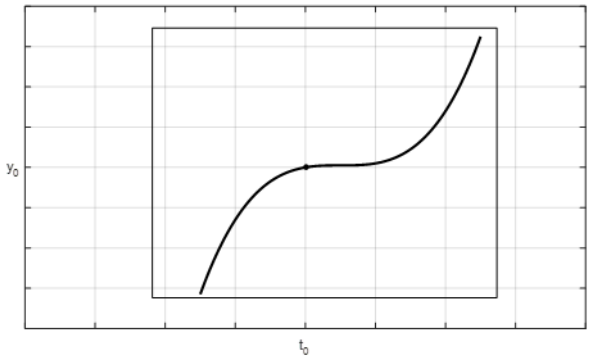

그림 2

4) 일반해와 특수해

Ex)

$$\frac{dy}{dt} = y$$

$y = e^t$는 특수해이다.

$y = Ce^t$는 방정식의 일반해이다.

5) Integral curves. (해 곡선)

1계 미방의 해가 되는 함수의 그래프

Ex)

$$\frac{dy}{dt} + y = 2$$

$$y(t) = 2 + Ke^{-t}$$

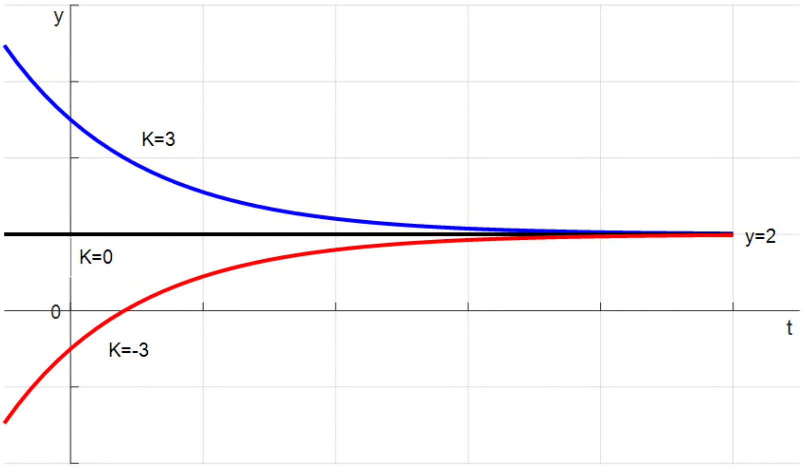

그림 3

Integral curves는 family of curves로 주어진다.