Module Vector field and line integral

1. 선적분

$C:\ r(t)=(x(t),y(t),z(t)) \qquad a \leqq t \leqq b$

f가 C를 포함하는 영역에서 정의된 연속함수라 가정한다.

① Line interal of f along the curve C

$$C: \int_C f(x,y,z)dS$$

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=|r'(t)|dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dS=\int_{t=a}^{t=b} f(x(t),y(t),z(t))|r'(t)|dt$$

② 하나의 curve C가 두 curve C_1과 C_2의 union이라하자. 즉, $C=C_1\cup C_2$

$$\int_{C_1\cup C_2} fdS=\int_{C_1} fdS+\int_{C_2} fdS$$

예제)

$$C:\ r(t)=(5\cos t,5\sin t) \quad 0\leqq t\leqq 2\pi$$

$$f(x,y,z)=1+\frac{y}{3}$$

$$\int_C fdS=\int_{t=0}^{t=2\pi}\left(1+\frac{5}{3}\sin t\right)|r'(t)|dt$$

$$r'(t)=(-5\sin t,5\cos t)$$

$$|r'(t)|=5$$

$$\int_C fdS=\int_0^{2\pi}5\left(1+\frac{5}{3}\sin t\right)dt$$

③ 선적분은 curve의 매개화에 의존하지 않는다.

예제) R^3에서 $(0,0,0)$에서 $(1,1,0)$까지의 직선과 $(1,1,0)$에서 $(1,1,1)$까지의 직선으로 이루어진 경로를 따라 $f(x,y,z)=x-3y^2+z$을 선적분하라

$$C_1:\ r_1(t)=(t,t,0) \qquad 0\leqq t\leqq 1$$

$$C_2:\ r_2(t)=(1,1,t) \qquad 0\leqq t\leqq 1$$

$$\int_{C_1 \cup C_2} f dS = \int_{C_1} f dS + \int_{C_2} f dS$$

$$= \int_0^1 f(t,t,0)|r_1'(t)|dt + \int_0^1 f(1,1,t)|r_2'(t)|dt$$

④ Vector field in R^2 (or R^3)

A Vector field on a domain in R^n is a function that assigns a vector to each point of the domain.

Ex 1) 움직이는 물체의 궤적 상의 각 점에 부여된 물체의 속도 vector

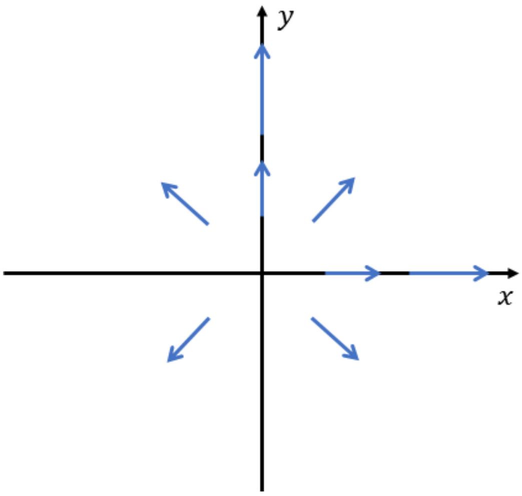
Ex 2) $\{f(x,y,z)=c\} \ni (x,y,z) \mapsto \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

f의 level surface의 각 점에 부여된 f의 gradient vector

Ex 3) Electric charge 를 중심으로 각 점에 미치는 Electric force를 나타내는 vector 를 각 점에 부여함으로 생기는 vector field (Electric force field)

Ex 4) 유체 (fluid)의 흐름을 나타내는 속도 vector

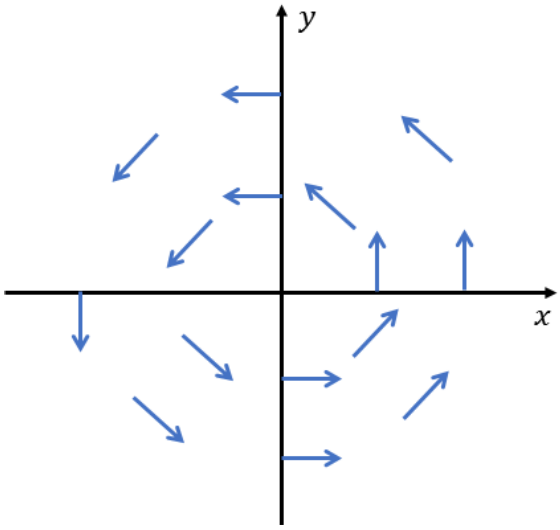
예제) $F(x,y) = xi + yj$



벡터장은 좌표평면 또는 3차원 공간의 각 점에 대응되는 화살표 (벡터)를 붙임으로써 시각적으로 나타낼 수 있다. 이는 벡터장의 성격을 이해하는데 도움이 된다.

예제) $F(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} j$

F는 길이가 1인 vector이다.



주어진 벡터장은 원점을 중심으로 회전한다는 것을 알 수 있다.

⑤ Vector field 의 line integral along C

$$C: \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad a \leqq t \leqq b$$

$$F = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$= \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

⑥ 물리적 의미: the work done by a vector force field $F(x,y,z)$ in moving an object from $t=a$ to $t=b$ along a path C

예제) $C: r(t) = (\sin t, \cos t, t) \qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi$

$F(x,y,z) = xi + yj + zk$

Line integral of F along C

$$= \int_C F dr$$

$$= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot \ r'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t) \cdot \ (\cos t - \sin t, 1) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t \cos t - \cos t \sin t + t dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2$$

예제)

$$C : r(t) = (t, t^2, 1) \qquad 0 \leqq \ t \leqq \ 1$$

$$\int_C (x^2 - 1) dx + xy dy + dz$$

$$F = (x^2 - 1, xy, 1)$$

$$\int_C F dr$$

$$\int_{t=0}^{t=1} \left[(t^2 - 1) \frac{dx}{dt} + t \cdot \ t^2 \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} \left[(t^2 - 1)(1) + t^3 (2t) + 0 \right] dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} t^2 - 1 + 2t^4 dt$$

⑦ 주어진 force field에서 한 점 A에서 다른 점 B로 한 경로를 따라 한 일은 A에 있는 point charge (or mass)를 B로 옮기는 필요한 에너지로 해석할 수 있다.
A에서 B로 가는 경로는 여러 가지가 있을 수 있다.
(질문) 서로 다른 경로에 따라 work는 어떻게 다른가?

예제)

$$F = xyi - y^2 j,\ \text{from } (0,0) \text{ to } (2,1)$$

$$C_1:\ r_1(t) = (2t, t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{t=0}^{t=1} ((2t)(t) - t^2) \cdot (2,1) dt$$

$$= \int_0^1 4t^2 - t^2 dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 dt$$

$$= t^3 |_0^1 = 1$$

$$C_2 : r_2(t) = \begin{cases} (2t, 0) & 0 \leqq t \leqq 1 \\ (2, t-1) & 1 \leqq t \leqq 2 \end{cases}$$

$$\int_{C_2} F dr = \int_0^1 F(2t, 0) \cdot (2,0) dt + \int_1^2 F(2, t-1) \cdot (0,1) dt$$

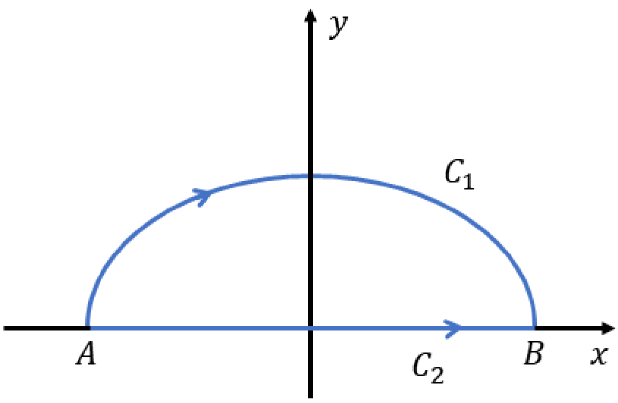
$$= \int_0^1 0 dt + \int_1^2 2(t-1)(0) - (t-1)^2 dt$$

$$= -\int_1^2 (t-1)^2 dt$$

$$= -\int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3}$$

예제)

$$F = \frac{1}{x^2 + y^2}(-yi + xj)$$



$\int_{C_1} F \cdot dz$ 과 $\int_{C_2} F \cdot dr$을 비교하라.

F가 D에서 연속이라고 가정하라.

정리 1. (Conservative field의 선적분은 path independent하다)

$A, B \in D$

A, B를 연결하는 임의의 두 path C_1과 C_2에 대해서

$$\int_{C_1} F\cdot \; dr = \int_{C_2} F\cdot \; dr \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow F = \nabla f \text{ for some function } f$$

증명 (<=) F가 어떤 함수의 그레디언트이면 선적분은 경로의 양 끝점에만 의존한다 :

$$\int_C F\cdot \; dr = \int_{t=a}^{t=b} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} dt$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \frac{df}{dt} dt$$

$$= f(r(b)) - f(r(a))$$

$$= f(B) - f(A)$$

반대로 $\Rightarrow$를 증명: we wants find f such that $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$$

$$P = (x, y, z) \in D$$

$$f(P) : = \int_{P_0}^{P} F\cdot \; dr$$

(왜 위의 함수는 잘 정의되는지 설명하라)

$f(x_0 + h, y_0, z_0)$를 계산하기 위해

$$r(t) = (x_0 + th, y_0, z_0) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(x_0 + h, y_0, z_0) = \int_{t=0}^{t=1} F(x_0 + th, y_0, z_0) \cdot \; (h, 0, 0) dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} F_1 (x_0 + th, y_0, z_0) h dt$$

$$\frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = \int_{t=0}^{t=1} F_1 (y_0 + th, y_0, z_0) dt$$

Take limit $h \to 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = F_1 (x_0, y_0, z_0)$ (증명 끝)

정의) (*)를 만족하는 vector field를 conservative field라고 부른다.

$F = \nabla f$ 일때 F를 gradient field라 부른다. 이때 f를 F의 potential function이라 부른다.

예제)

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= -\frac{mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xi+yj+zk)$$

$$= -\frac{mMG}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

Gravitational force and its potential

⑧ Q: 주어진 F가 conservative field인지 어떻게 알 수 있는가?

$$\text{필요조건 } F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

⑨ 정리 1의 implication :

F가 conservative field 이면 $F = \nabla f$인 f가 존재한다.

$\int_C F \cdot dr$을 계산하기 원한다고 하자.

C : $r(t)$, $a \leq t \leq b$이면

$\int_C F \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$이다.

즉 work는 path의 종점과 시점에서의 potential 의 차이이다.

예제)

$$\vec{F} = y\cos x\vec{i} + \sin x\vec{j}$$

Decide whether $\vec{F}$ is conservative field or not.

①

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} - \frac{\partial y\cos x}{\partial y} = \cos x - \cos x = 0$$

② Find its potential

$$\vec{F} = \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x$$

$$f = \int y\cos x dx = y\sin x + \varphi(y)$$

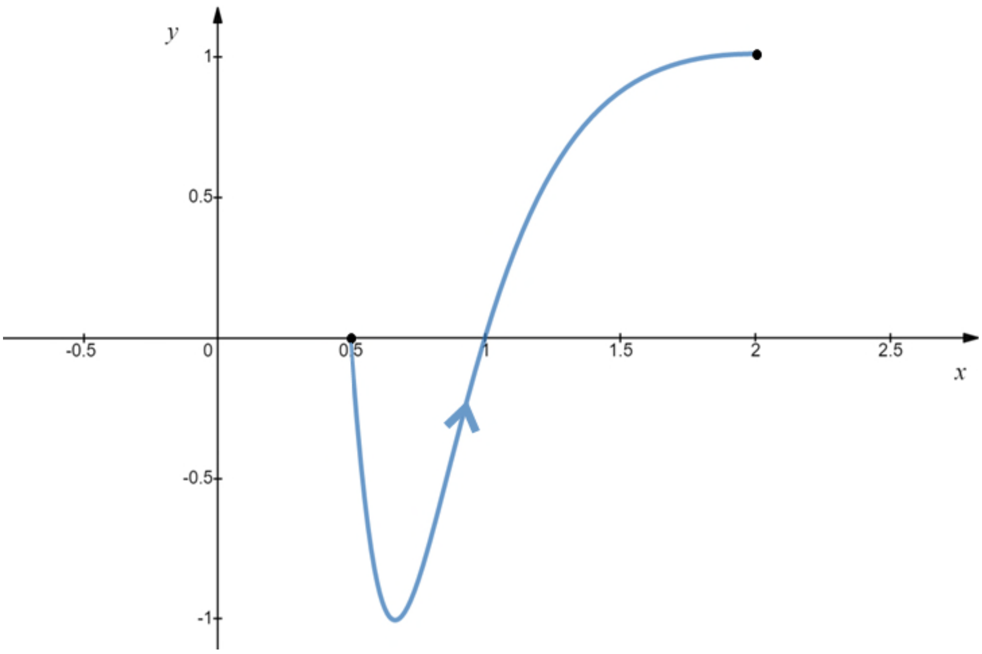
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x + \varphi'(y) = \sin x$$

$$\varphi'(y) = 0 \qquad \varphi(y) = C$$

$$f = y\sin x + C$$

③

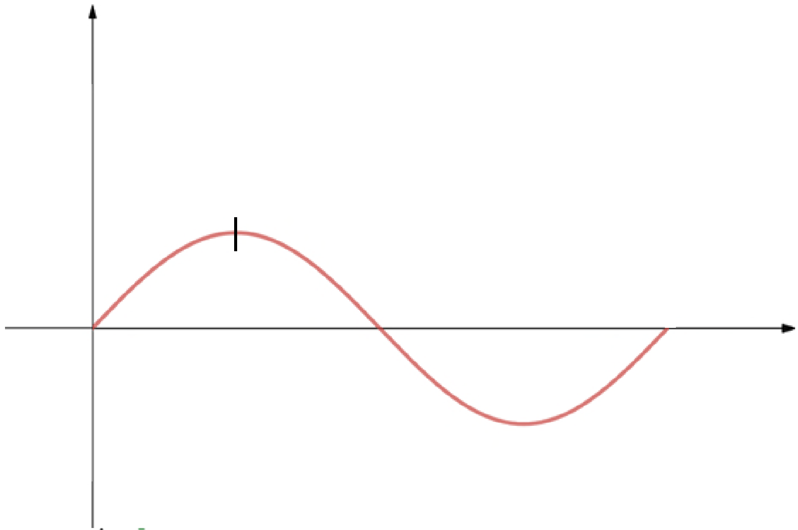
$$C: y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$$

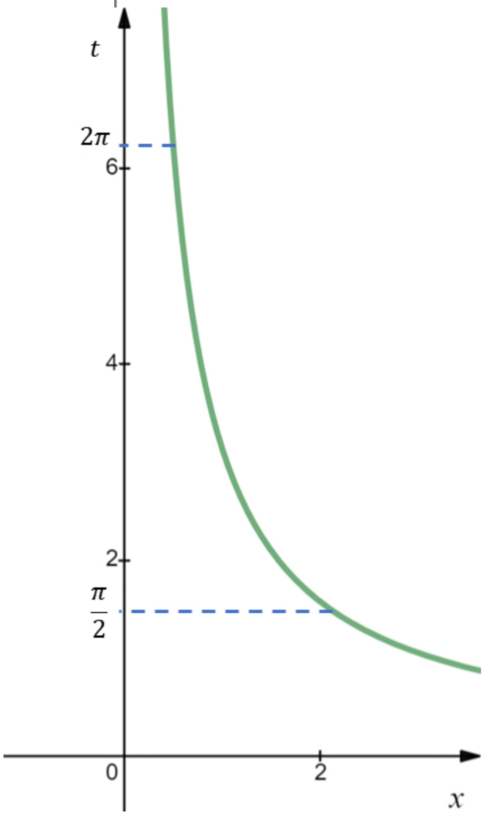


$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = \oint f(B) - f(A)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$B = (2,1)$$





③'

$$(1-t)\left(\frac{1}{2},0\right)+t(2,1)=\vec{r}(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{2}(1-t)+2t,t\right)$$

$$\vec{r}'(t)=\left(2-\frac{1}{2},1\right)=\left(\frac{3}{2},1\right)$$

$$\int_C F\cdot\ dr=\int_{t=0}^{t=1} t\cos\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\sin\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt$$

예제)

$$\vec{F}=(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cos y+yz)\vec{i}+(xz-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin y)\vec{j}\ \ +(xy+z)\vec{k}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}\ \ ?\ z-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}\ \ ?\ x-x=0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial z}\ \ ?\ \ y-y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+z$$

$$f=\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cos y+yzdx$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cos y+xyz+g(y,z)$$

$$f_y=-e^x\sin y+xz+\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial g}{\partial y}=0\ \ g=g(z)$$

$$f_z=xy+g'(z)=xy+z,\ \ g(z)=\frac{1}{2}z^2+C$$

$$C:\ \vec{r}(t)\neq\ \ (t,t^2,t^3)\qquad 0\leqq\ \ t\leqq\ \ 1$$

$$\int_C\vec{F}\cdot\ \ d\vec{r}=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}\vec{F}\cdot\ \ dr$$

$$=f(1,1,1)-f(0,0,0)$$

$$=\mathrm{e}\cos(1)+\frac{1}{2}$$