Module Multi-variable functions Introduction

1. 다변수 함수의 정의

$$f: R \times R \to R \quad \text{이변수 함수}$$

$$(a,b) \mapsto f(a,b)$$

$$f: R \times R \times R \to R \quad \text{삼변수 함수}$$

$$(a,b,c) \mapsto f(a,b,c)$$

$$f: R^n \to R \quad \text{변수가 n개인 함수}$$

$$R^n = R \times \cdots \times R = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_j \in R, 1 \leq j \leq n\}$$

정의구역인 열린 구간인 1변수 함수 $f: (\alpha, \beta) \to R$

$$f: U \to R \qquad U \subset R^n$$

$$U = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \subset R^2$$

$$U = \{X \in R^2 : |X - P| < r\}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) \text{ or } f(X) \text{ or } f(X)$$

예제)

$$f(x,y) = x + y$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x,y,z) = e^x \cos(yz)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

2. 다변수 함수의 그래프

학생들은 2변수 함수의 그래프를 3차원에 그려봄으로 multivariable calculus에서 만나게 되는 기본적인 문제들을 경험해본다.

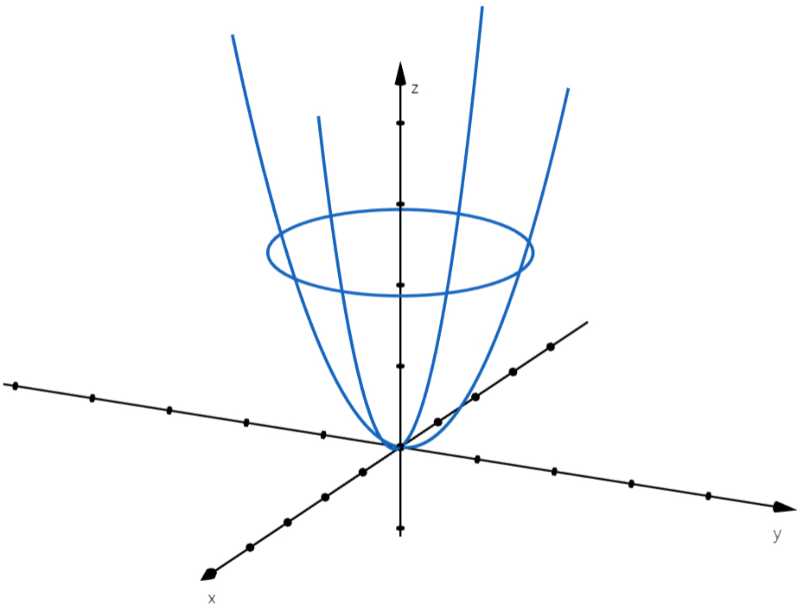
- 2변함수의 그래프를 그리는 법 배우기
- Level surface 생각하는 이유
- 다변수함수의 극한 정의
- 다변수함수의 불연속성 check 하는 법

다음 함수의 그래프를 그려보자

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$z = x^2 + y^2$$

yz-plane, xz-plane, plane $z = c$로 각각 자른 단면을 관찰한다.



$$\text{yz-plane} \Rightarrow x = 0 \qquad z = y^2$$

$$\text{xz-plane} \Rightarrow y = 0 \qquad z = x^2$$

$$z = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = c$$

그래프는 곡면으로 회전 포물면에 해당한다.

Q: 그래프를 관찰하면서 발견할 수 있는 것은 무엇인가?

예제) 다음 함수의 그래프를 그려보라

$$f(x,y) = 1 - x - y$$

$$z = 1 - x - y$$

$$x + y + z = 1 \qquad \text{평면의 방정식}$$

=> 일차함수의 그래프는 기하학적으로 평면이다.

3. Level curve and level surface

예제)

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \subset R^4$$

같은 함숫값을 갖는 점들의 집합

$$\{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\} \subset R^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

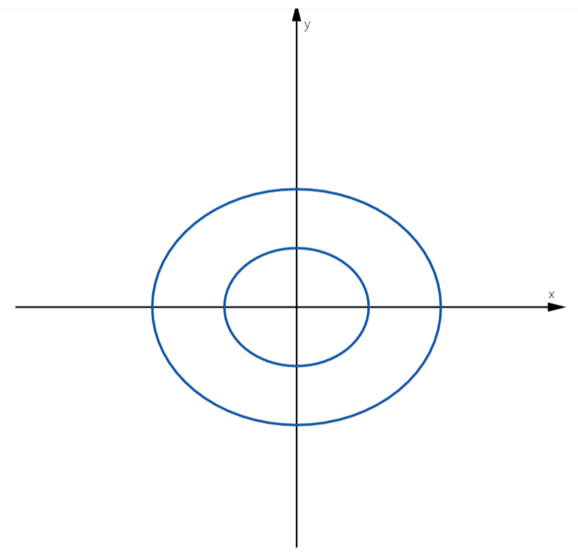
level surface를 통해서 f에 대해서 알 수 있는 것은 무엇인가?

예제)

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$z = x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = c, \quad 2x^2 + 3y^2 = c$$



원점을 중심으로 한 원 위에서는 함수 값이 일정하다. level curve is circle.

일반적으로 $f: R^n \to R$ $\left\{X = (x_n, \cdots, x_n) \in R^n : f(X) = C\right\}$ is called "level set"

4. 함수의 극한과 연속성

정의)

$\lim_{x\to p} f(x) = L$ ⇔ $|f(x) - L|$ is getting smaller as $|x-p|$ is getting smaller

예제)

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$|(x,y)-(0,4)| \to 0$$

$$\Rightarrow \quad |x-0| \to 0 \quad \text{and} \quad |y-4| \to 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}} \to \frac{0}{\sqrt{4}} = \frac{0}{2} = 0$$

예제)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2+y^2}{x+y+1}$$

2.3

$$u \subset R^n \qquad f: u \to R$$

$$p \in u$$

정의 f is continuous at p

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{X\to P} f(X) = f(P)$$

예제)

$$f(x,y) = x+y$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x+y$$

$$= a+b = f(a,b)$$

예제)

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{1}{x^2+y^2+1} = \frac{1}{a^2+b^2+1}$$

예제)

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \quad \text{is continuous everywhere}$$

예제)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Take line $x=0$ $\quad f(0,y)=-\dfrac{y^2}{y^2}=-1$

$$y=0 \quad f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1$$

limit does not 예제)ist. f is not continuous at $(0,0)$

Q: 연속이 되는 것은 어떻게 보일 수 있는가?

예제)e 2.9 어떻게?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad ?$$

$$x^2+y^2 \geqq 2xy$$

$$\frac{1}{2} \geqq \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geqq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \to 0$$

$$0 \leqq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$