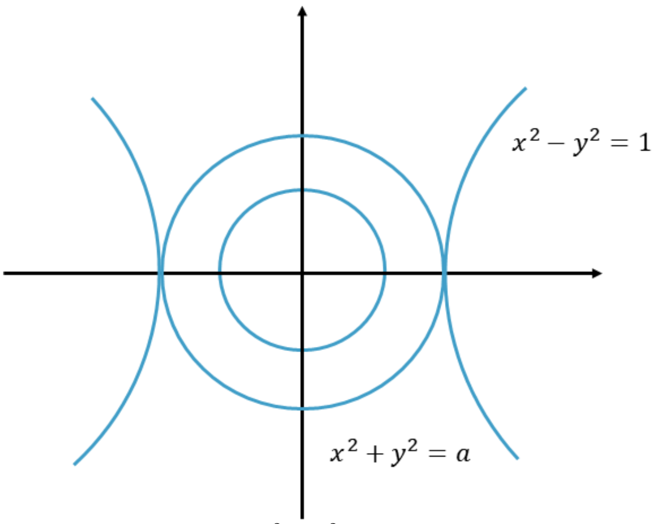
Module Lagrange multipliers

1. Constraint가 있는 최적화 문제

예제) 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점중 $(0,0)$에서 가장 가까운 거리에 있는 넘을 찾는 문제를 생각해보자.

$\Rightarrow$ Find minimum of $x^2 + y^2$ when $x^2 - y^2 = 1$

$f(x,y) = x^2 + y^2$을 한 변수에 대한 식으로 바꾸어 문제를 풀수 있지만 다른 관점에서 문제를 풀어보자.



Level curve of f : $x^2 + y^2 = a$를 생각해 보라

a를 0에서부터 점점 키워 가다가 $x^2 - y^2 = 1$과 만나는 순간이 있다. 그때의 교점이 원점에서 가장 가까운 점임을 알 수 있다. 교점을 (x_0, y_0) 더하라.

$g(x,y) = x^2 - y^2 = 1$ 라고 놓자.

$\nabla f(x_0, y_0)$와 $\nabla g(x_0, y_0)$는 평행함을 알 수 있다.

그러므로 어떤 scalar λ에 대해서 $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ 을 만족한다.

두 곡선이 서로 접할 때 접점에서 공통 접선을 갖는다. 따라서

(x_0, y_0)가 만족하는 방정식을 얻는다.

$$(2x, 2y) = \lambda(2x, -2y)$$

$$2x = 2\lambda x,\ 2y = -2\lambda y$$

(x,y)는 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로 $x \neq 0$

첫 번째 식으로부터 $\lambda = 1$을 얻는다.

두 번째 식에 대입히면 $y = 0$

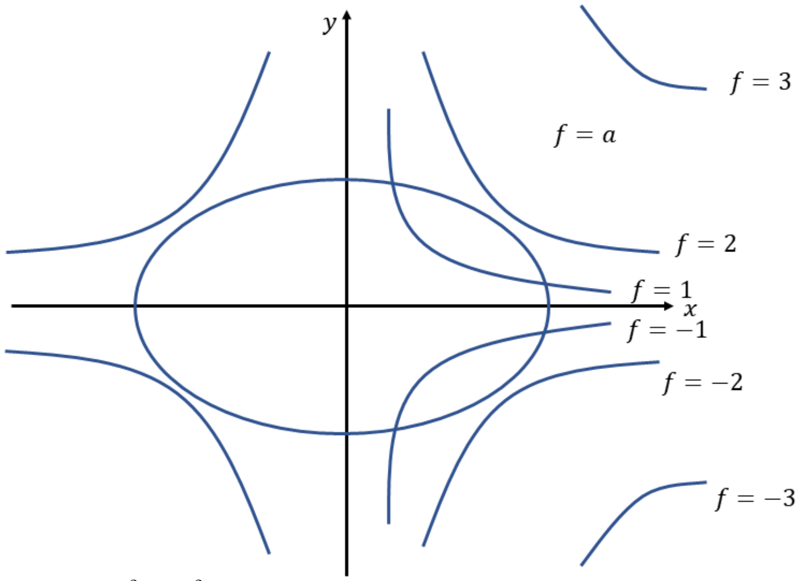
$x^2 - y^2 = 1$위의 점이므로 $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

$(1,0)$, $(-1,0)$이 교점이 된다.

즉, $f(x,y)=x^2+y^2$은 $(1,0)$, $(-1,0)$에서 최솟값을 가진다.

예제)

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$위에서 $f(x,y)=xy$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.



$y(x,y)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1$이라 놓자.

f의 level curve가 타원 $y=0$과 한 점에서 만날 때 f가 최대와 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

그 점에서 적당한 scalar λ에 대해서 $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$을 만족한다.

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(y,x)$$

$$\nabla g=(\frac{1}{4}x,y)$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{4}\lambda x,\ \ x=\lambda y$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{4}\lambda(\lambda y)=\frac{1}{4}\lambda^2 y$$

$$\Rightarrow\ y=0 \text{ or } \lambda^2=4\ \ (\lambda=\pm 2)$$

case 1: $y=0 \Rightarrow x=0$ 그러나 $(0,0)$은 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$위에 있지 않다.

case 2: $y\neq 0\quad \lambda=\pm 2 \quad \Rightarrow x=\pm 2y$

타원의 방정식에 대입하면

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$y^2=1,\ y=\pm 1$$

$$\Rightarrow\ (2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1)$$

$(2,1)$, $(-2,-1)$에서 최댓값 2

$(-2,1),(2,-1)$에서 최솟값 -2를 갖는다.

예제)

$x^2+y^2+z^2=30$ 위에서 $f(x,y,z)=x-2y+5z$ 의 최대, 최솟값을 구하라.

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-30$

Level surface $g=0$와 $f=a$가 한 점에서 만날 때 최대 또는 최솟값을 갖는다.

$$\lambda\nabla f=\nabla g$$

$$\lambda(1,-2,5)=(2x,2y,2z)$$

$$x=\frac{\lambda}{2},\ y=-\lambda,\ z=\frac{5}{2}\lambda$$

(x,y,z)가 sphere $x^2+y^2+z^2=30$ 위에 있으므로 $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+(-\lambda)^2+\left(\frac{5}{2}\lambda\right)^2=30$

$$\frac{\lambda^2}{4}+\lambda^2+\frac{25}{4}\lambda^2=30$$

$$\lambda^2=4 \qquad \lambda=\pm 2$$

$(1,-2,5)$ $(-1,2,-5)$에서 최대, 최소를 갖는다.

$$f(1,-2,5)=1-2(-2)+5(5)=30$$

$$f(-1,2,-5)=-30$$

연습문제 1.

평면 $x+2y+3z=13$ 위의 점 중 $(1,1,1)$에 거리가 가장 가까운 점을 찾으라.

연습문제 2.

곡면 $z=xy+1$ 위의 점 중 원점에서 거리가 가장 가까운 점을 찾으라.

연습문제 3.

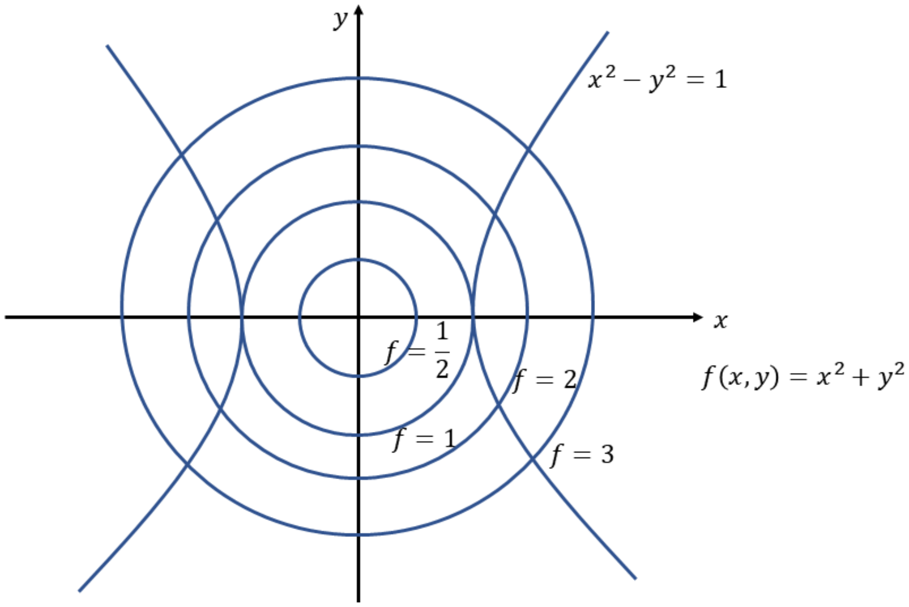
곡면 $z^2=xy+4$에 대해서 위의 문제를 풀어보라

연습문제 4.

겉면적이 $12cm^2$인 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 가로, 세로, 높이의 길이를 어떻게 잡아야 부피가 최대가 되는가? (변수소거법과 Lagrange multiplier method 각각 사용하여 풀어

보라)

예제)



$f=3$과 $x^2-y^2=1$이 만나는 점에서 f의 값은 3이다. $f=a$와 $x^2-y^2=1$이 만나는 점에서 f의 값은 a이다. 그림이 보여주는 것은 a가 작아질수록 $f=a$와 $x^2-y^2=1$의 교점이 $(\pm 1,0)$으로 다가가는 것을 볼 수 있다. $a<1$ 이면 더 이상 $f=a$와 $x^2-y^2=1$은 교점이 없다. 이 점은 $x^2-y^2=1$위에서 $f \geq 1$ 임을 의미한다.

maximize or minimize a function $f(x,y,z)$ subject to a constraint (or side condition) of the form $g(x,y,z)=k$

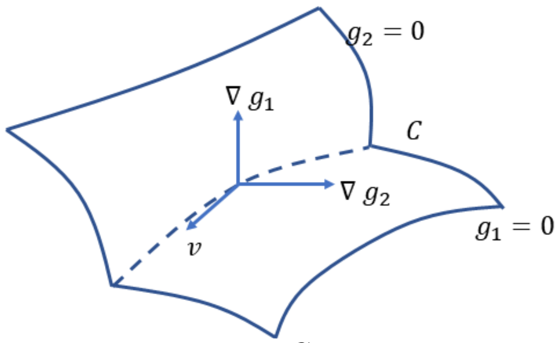
$x^2-y^2=1$ 위에서 f의 최솟값을 찾는 문제는 level curve $f=a$가 $x^2-y^2=1$와 만나는 a 중 가장 작은 a를 찾는 문제와 같다.

2. Lagrange multiplier with two constraints.

Find extreme values of $f(x,y,z)$

$$g_1(x,y,z)=0$$

$$g_2(x,y,z)=0$$



V: tangent vector to C

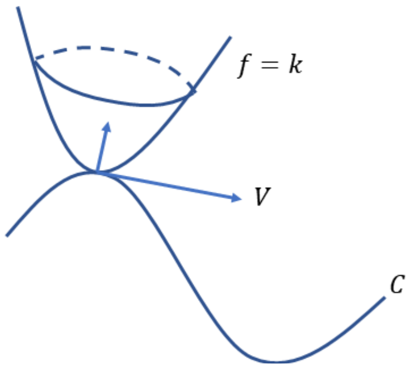
$$\Rightarrow \nabla g_1 \perp V$$

$$\nabla g_2 \perp V$$

($\because$ gradient vector is normal to surface.)

When f has max or min at (x_0, y_0, z_0) in C

∇f is normal to V (V is tangential to surface)



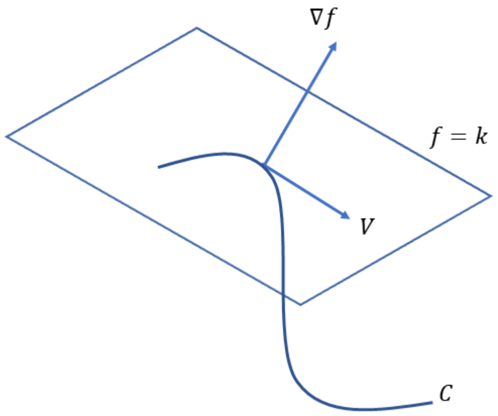
$\Rightarrow \nabla f$ is in normal place to V

normal place is generated by ∇g_1 and ∇g_2, thus $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ at (x_0, y_0, z_0)

예제) $f(x(t), y(t), z(t))$ has local max a local value at $t = t_0$

Show that $\nabla f(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \perp r'(t_0)$

예제)



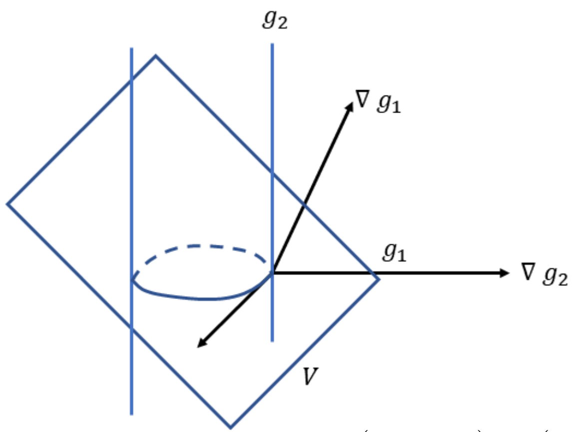
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$g_1=x+y+z-1$$

$$g_2=x^2+y^2-1$$

$g_1=g_2=0$ 위에서의 함수 f의 최대 최소값을 구하여라.

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2$$



$$(2x,2y,2z)=\lambda(1,1,1)+\mu(2x,2y,0)$$

$$\begin{cases}2x=\lambda+2\mu x \\ 2y=\lambda+2\mu y \\ 2z=\lambda\end{cases}\qquad \begin{matrix}g_1=0 \\ g_2=0\end{matrix}$$

$$2x(1-\mu)=2z$$

$$2y(1-\mu)=2z$$

$$(x-y)(1-\mu)=0$$

①

$$\mu = 1$$

$$z = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 1$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 1$$

$$x = 0 \quad y = 1$$

$$x = 1 \quad y = 0$$

$$(0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 0)$$

②

$$x = y$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

$$z = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$