Module Vector: cross product

1. 벡터의 외적(cross product)

Question 3차원 공간에서 두 개의 벡터와 동시에 수직이 되는 벡터를 어떻게 구할 것인가?

정의. 3차원 공간의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 와 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 의 **외적(cross product)** $\vec{a}\times\vec{b}$ 를 다음과 같이 정의

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

행렬식을 이용한 표현

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

보기. $a=(2,1,1)$, $b=(-4,3,1)$ 일 때 $a\times b$를 구하여라.

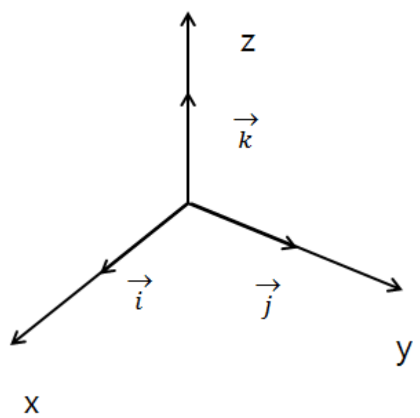
풀이. $a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&1&1\\-4&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}2&1\\-4&1\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}k$

$$=(1-3)i-(2+4)j+(6+4)k$$

$$=-2i-6j+10k=(-2,-6,10)$$

왜 위와 같이 정의했을까?

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$



orientation의 문제 => 오른손의 법칙

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)= u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)= v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})$

일차결합 형태로 표현한 후 수의 곱셈처럼 이해한다고 했을 때 배분법칙을 적용

$$\begin{aligned}&=(u_1v_2)\vec{i}\times\vec{j}+(u_1v_3)\vec{i}\times\vec{k}+(u_2v_1)\vec{j}\times\vec{i}\\&\quad+(u_2v_3)\vec{j}\times\vec{k}+(u_3v_1)\vec{k}\times\vec{i}+(u_3v_2)\vec{k}\times\vec{j}\\&=(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}\end{aligned}$$

여기서 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$
$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ (나머지 조합에 대해서도 순서가 바뀌면 반대 방향의 벡터)

처음에 제기했던 질문
3차원 공간에서 두 개의 벡터와 동시에 수직이 되는 벡터를 어떻게 구할 것인가?

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

*확인할 점
$\vec{a},\vec{b}$의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$는 $\vec{a},\vec{b}$ 와 각각 수직이다. 즉, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 이고 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ 이다.

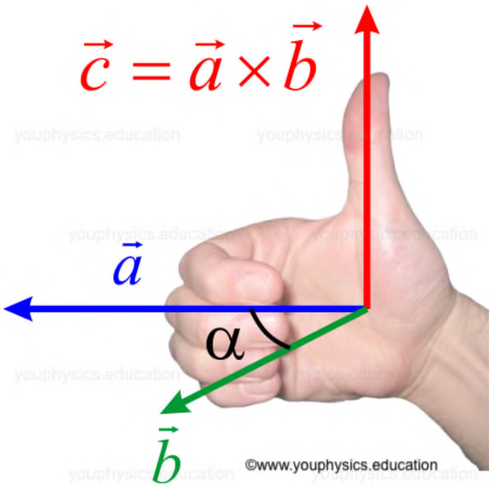
Claim $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}a_3=\det\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{a}\\\vec{b}\end{pmatrix}=0$ (앞에서 행렬식의 성질 배운 것

을 확인)

Orientation => determinant 배열 순서가 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ 를 따름

오른손의 법칙



$\vec{a}\times\vec{b}$의 정의는 원하는 방향의 벡터를 찾아주었다. $\vec{a}\times\vec{b}$의 크기는 어떤 정보를 갖고 있는가?

정리 $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|(\sin\theta),\qquad 0<\theta<\pi$

=> 식에 대한 유도: $|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(\sin\theta)^2$ 를 보일 것

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}||\vec{v}|(\sin\theta) &= |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}} \\
&= \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}
\end{aligned}
$$

$|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ 가 됨을 보이면 됨

우변을 전개하면

$$= (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2$$

$$= \sum_{j,k} u_j^2 v_k^2 - \sum_j u_j v_j \sum_k u_k v_k$$

$$= \sum_{j=k} u_j^2 v_k^2 - \sum_{j=1}^{3} u_j^2 v_j^2 + \sum_{j\neq k} u_j^2 v_k^2 - \sum_{j\neq k} u_j u_k v_j v_k$$

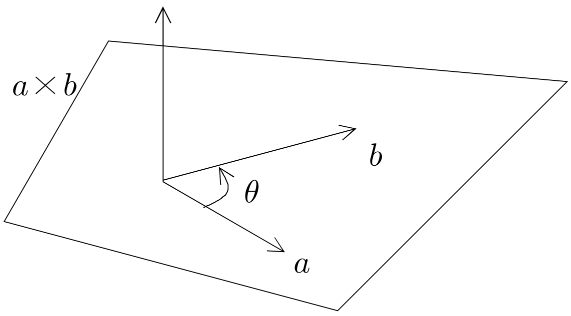
=> $+u_1^2v_2^2 - u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2 - u_2u_1v_2v_1 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

$+u_1^2v_3^2 - u_1u_3v_1v_3 + u_3^2v_1^2 - u_3u_1v_3v_1 = (u_1v_3 - u_3v_1)^2$

$+u_2^2v_3^2 - u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_2^2 - u_3u_2v_3v_2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2$

우변의 합이 $\vec{u}\times\vec{v}$의 크기의 제곱.

$\vec{a}\times\vec{b}$를 종합해보면 두 벡터에 의해 결정되는 평면에 수직인 벡터로 방향은 오른손의 법칙에 의해 결정되고 크기는 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$인 벡터이다. 여기서 θ 두 벡터 사이의 각 (180도 보다 작은 쪽)



외적은 다음과 같은 성질을 갖는다: $a, b, c \in R^3$ 에 대해

1)교환법칙이 성립하지 않고 $b\times a = -a\times b$ 이다.

2) 자기 자신과의 외적 혹은 평행한 벡터끼리의 외적은 0-벡터이다. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

3) 외적과 더하기 사이에 배분법칙이 성립한다.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

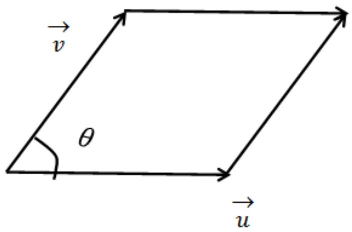
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$$

4) $a\cdot\ (b\times c)=(a\times b)\cdot\ c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 이다. (Triple product)

----

2. Application

(1) Area of Parallelogram



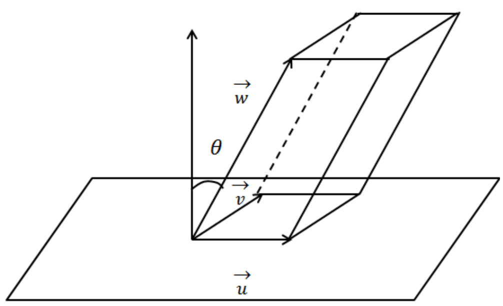
$A=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$

Ex) $\vec{u}=(1,2,1)$ $\vec{v}=(-2,1,2)$에 의해 결정되는 평행사변형의 면적?

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$|\vec{u}\times\vec{v}|^2=(4-1)^2+(2+2)^2+(1+4)^2=9+16+25=50$
$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{50}$

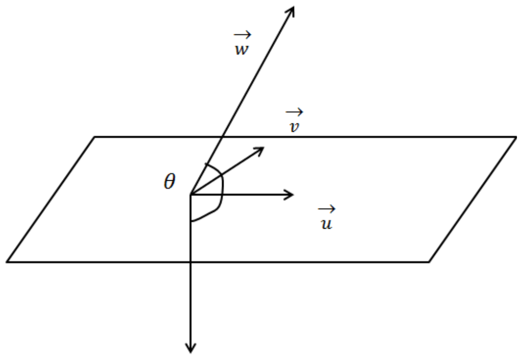
(2) Volume of Parallelepiped (평행육면체)



Volume $=base\ area\times height$

$=|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}|(\cos\theta)$

$=|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\ \vec{w}|$



→ $(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\ \ \vec{w}<0$

(세 벡터의 triple product라고도 부름)

절대값이 필요한 이유: 내적의 값이 음수가 될 수 있다. 즉 cosine값이 음수가 되는 경우

예제) 세 벡터 $(1,-1,1)$, $(-2,3,1)$, $(-1,-2,-3)$ 에 의해 이루어지는 평행육면체의 부피는 $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{matrix}\right\| = 7$

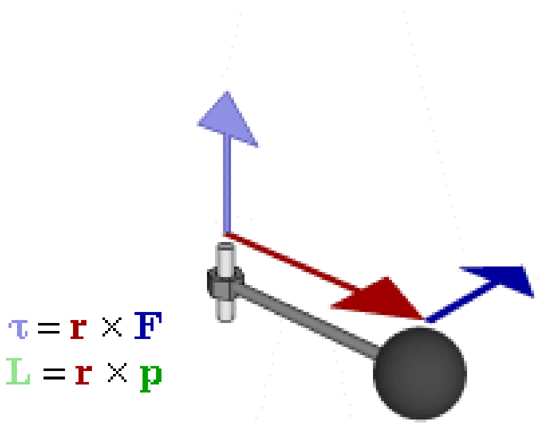
(3) 회전력(torque)

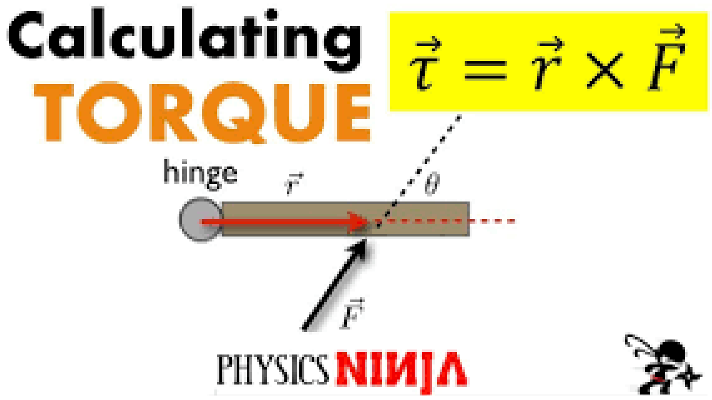
공간 속 한 점 P에 힘 F가 작용하여 점 P를 점 O 둘레로 회전시킬 때 O와 P가 한 막대기 혹은 wrench위의 점이라고 하자.

벡터 $\vec{r}=OP$와 힘 F의 외적 $\vec{r}\times\vec{F}$을 회전력이라고 한다.

즉, 회전력의 크기는 $|OP\times F|$이고, 회전이 $OP\times F$와 수직인 평면에서 일어난다.

회전하는 방향은 회전면과 수직이며 오른손의 법칙을 따라 정해진 방향





회전력의 크기 = |r| |F| sin (theta)