Module Vector: Basics and inner product

1. 벡터 (Vector) : Preparation for multi-variable calculus (모듈14)

Function defined on n-dimensional Euclidean space (n>1)

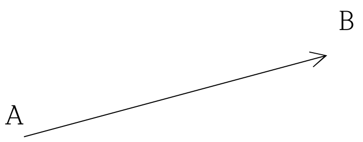
Example $\mu(x,y,z)$: Electric charge density on 3-space
$E(x,y,z)$: Electric potential at position (x, y, z) on space determined by $\mu(x,y,z)$

Example 유체의 흐름이 있을 때 각 점에서 유속을 나타내는 방법은?

벡터란 무엇인가?
*질량, 길이, 시간 => 숫자로 표현 (scalar)
*힘, displacement, 속도(velocity) => 양을 표현하는 숫자 이외에 방향을 포함

정의) 벡터(vector) =>크기와 방향을 가지는 양

평면 혹은 공간의 점 A에서 출발하여 점 B 에서 끝나는 화살표를 $\overrightarrow{AB}$ 로 표시한다.
이 때 A 를 **시점**, B 를 **종점**이라고 한다.

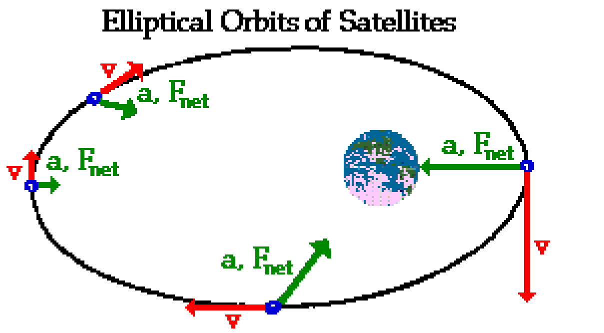


유향선분 (directed line segment)

화살표로 표시하던 벡터는 화살표의 길이가 크기를 나타내고 화살표가 가리키는 방향이 방향을 나타낸다.

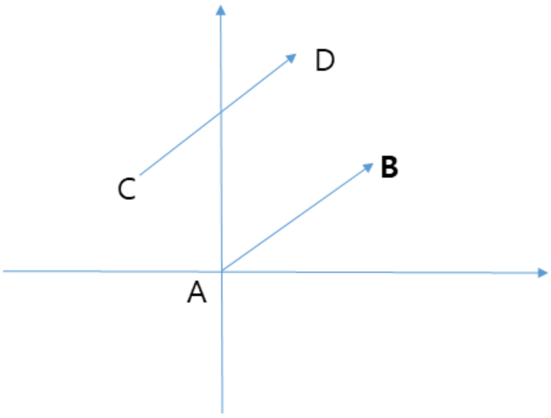
지구 주위를 도는 위성의 작용하는 중력 (force)를 나타내는 벡터와 위성의 속도 벡터

두 화살표 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{A'B'}$ 이 방향이 같고(평행하고) 길이가 같으면 이 두 화살표는 같은 벡



Even moving in elliptical motion, there is a tangential velocity and an inward acceleration and force. In this case, the a and F vectors are directed towards the central body.

터(같은 양과 같은 방향)를 나타내는 것으로 본다.



A(0,0), B(2,2), C(-1, 1), D(1,3)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

=> coincidence by parallel translation

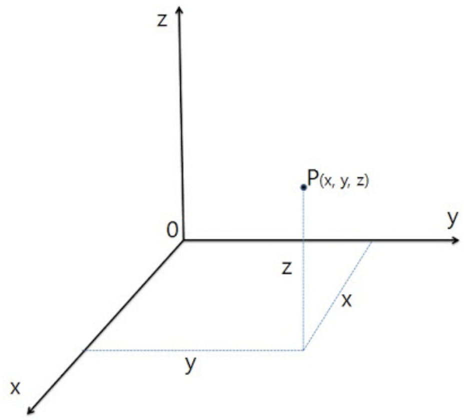
정의) **표준위치 (standard position)**

주어진 벡터에 대해 시점이 원점이 되는 벡터로서 동일한 벡터가 오직 하나 존재하며 이를 주어진 벡터의 표준벡터라고 한다.

=> 표준벡터를 이용하면 벡터를 종점으로 벡터를 정할 수 있다.

$(v_1, v_{2,} v_3)$

(3차원 직교 좌표)



원점을 시점으로 하는 화살표의 종점과 R^3 의 원소사이에 일대일 대응관계가 있으므로 R^3 의 원소를 벡터라고 부른다.

앞으로는 R^3(혹은 R^n) 의 원소를 경우에 따라 때로는 **점**, 때로는 **벡터**라고 부르기로 한다.

정의) **벡터의 성분(component)**

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ 평면벡터

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3차원 공간의 벡터

(표기: 벡터는 알파벳 대문자를 쓰거나, 소문자나 대문자 위에 화살표를 붙이거나, 또는 소문자를 bold체로 쓰는 것으로 보통 표시한다.

A, $\vec{v}$, $\boldsymbol{v}$

예제) P=(-3, 4, 1), Q=(-5, 2, 2). 벡터 $\overrightarrow{PQ}$의 표준벡터 (또는 component form)

$\vec{v} = (-5-(-3), 2-4, 2-1) = (-2, -2, 1)$

정의) **벡터의 크기 (magnitude)**

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

예제) $\vec{a} = (1, 2, 3) \in R^3$의 길이는 $\| \vec{a} \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ 이다.

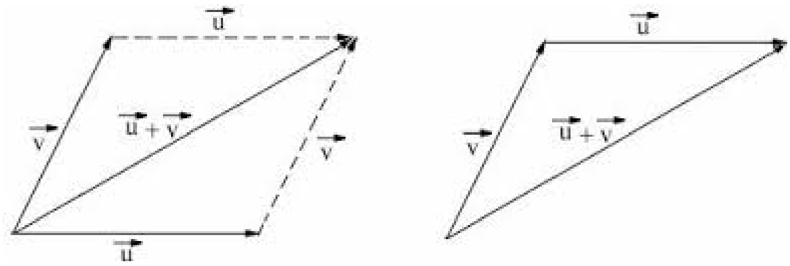
2. 벡터의 대수적 연산

1)벡터의 합

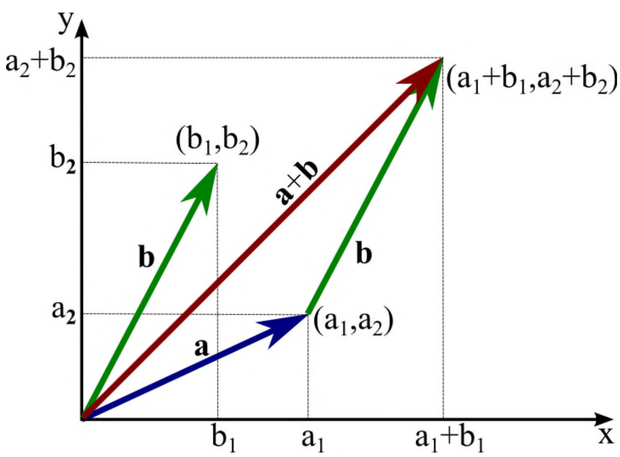
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

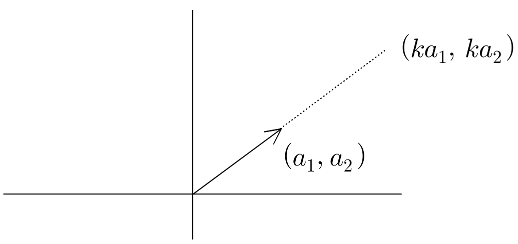
2) scalar 곱

$k\vec{u} = k(u_1, u_2, u_3) = (ku_1, ku_2, ku_3)$



3. 평행사변형의 법칙 (평행사변형의 대각선)



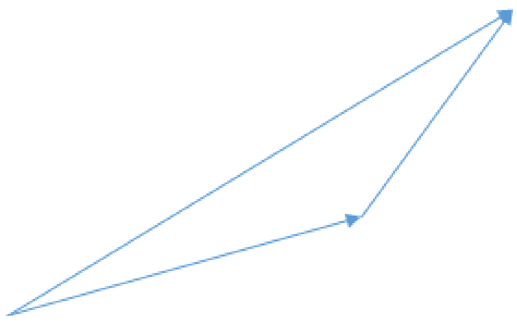


예제) 화성의 무인 탐사로봇이 NASA의 원격조정으로 움직인다고 하자.

1) 정동쪽 방향에서 15도 방향으로 75미터를 이동했다 (O -> A)

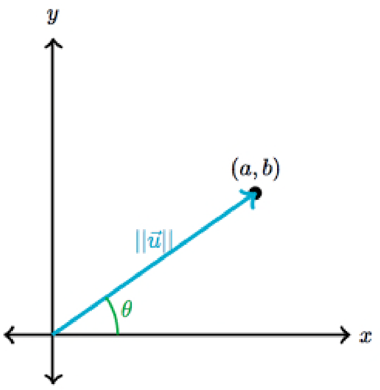
2) 다시 30 도 방향으로 50미터를 이동했다. (A -> B)
탐사로봇의 최종 위치는 어디인가?

첫 번째 이동 $\overrightarrow{OA} = (75\cos 15, 75\sin 15)$
두 번째 이동 $\overrightarrow{AB} = (50\cos 30, 50\sin 30)$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$



4. 극좌표를 이용한 벡터의 표현

$\vec{v} = (v_1, v_2) = (|\vec{v}|\cos\theta, |\vec{v}|\sin\theta)$
$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\cos\theta, \sin\theta)$를 벡터 $\vec{v}$의 방향(direction)이라고 한다.



예제) 크기가 2이고 방향이 $\pi/6$인 벡터는?

$\vec{v} = (2\cos\pi/6, 2\sin\pi/6) = (\sqrt{3}, 1)$

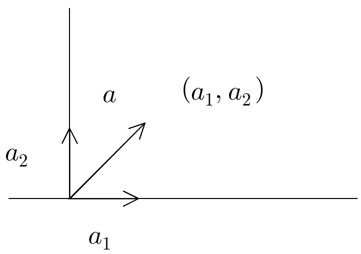
이 벡터의 방향은? (cos (pi/6), sin (pi/6)

5. 표준단위벡터

길이가 1인 벡터를 단위벡터(unit vector)라고 한다.

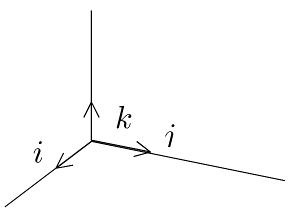
정의. i-번째 성분 한 개만 1이고 나머지 성분이 모두 0인 벡터를 e_i로 표시하고 이를 표준 단위벡터(standard unit vectors)라고 한다. 특별히 3-차원 공간의 표준 단위벡터들은 $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$로 표시한다.

* 평면



$$a = a_1(1, 0) + a_2(0, 1)$$
$$= a_1 e_1 + a_2 e_2$$

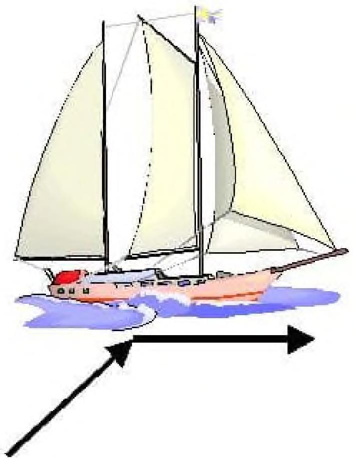
* 3차원 공간

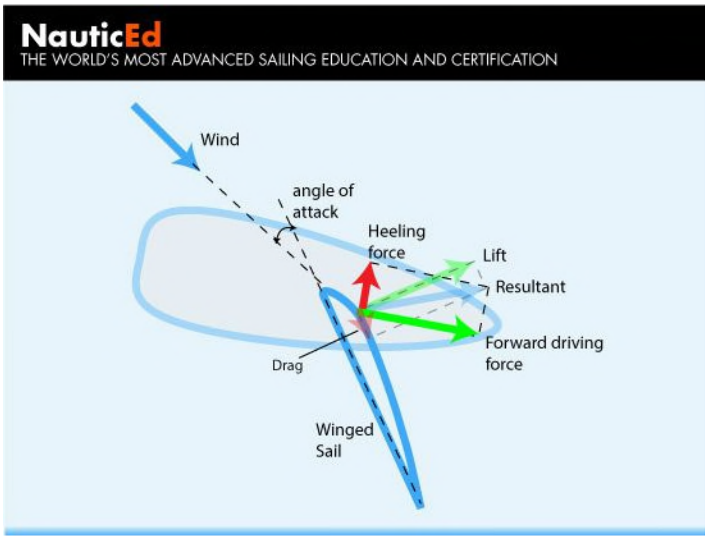


$\mathbb{R}^3$의 임의의 벡터 $a = (a_1, a_2, a_3)$는 $a_1 i + a_2 j + a_3 k$와 같다. 이처럼 벡터들에 스칼라를 각각 곱하여 더한 것을 그 벡터들의 일차결합(linear combination)이라고 한다. $a_1 i + a_2 j + a_3 k$는 i, j, k 의 일차 결합이다.

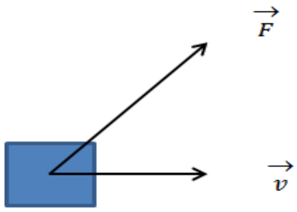
6. 벡터의 내적

요트를 조정하고 있다. 이동하고자 하는 방향과 바람의 방향이 다를 때 어떻게 할 것인가?

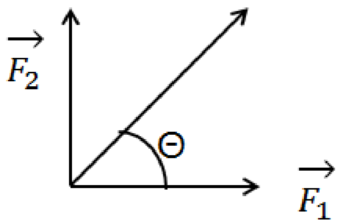




일반적으로



벡터 v 방향의 힘의 크기는 ?



$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$
$|\vec{F_1}| = |\vec{F}|\cos\theta$

Def) Dot product of $\vec{u}$ and $\vec{v}$ (u=(u_1 , u_2 , u_3), v=(v_1 , v_2 , v_3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

내적(Inner product)/ Dot product / Scalar product
<=> Outer product/Cross product/ Vector product

Ex) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(-1) + (-1)(2) + (2)(3) = -1 - 2 + 6 = 3$

내적의 성질

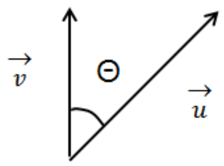
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ are vectors, c: *scalar*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ (벡터의 크기와 벡터의 내적)
5. $0 \cdot \vec{u} = 0$

정리

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos\theta$$

(두 벡터는 여기서 크기가 0이 아니다. theta= 두 벡터 사이의 각, 180 도 보다 작은 쪽에 대한 각)



Proof) Apply the law of cosines

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

벡터는 좌표 공간 상의 한 점으로 이해 => 벡터의 성분 <=> 점의 좌표
두 벡터의 차이의 크기는 두 벡터가 나타내는 두 점 사이의 거리와 같다

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \qquad \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2$$

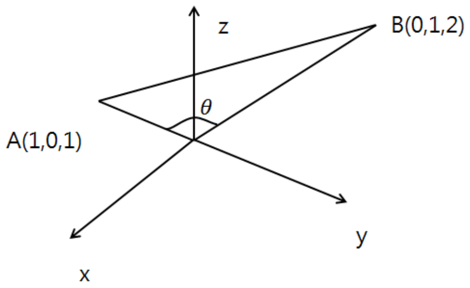
$$=u_1^2+u_2^2+u_3^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2-2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Ex) 삼각형 OAB에서 각 AOB를 구하라.

내적은 두 벡터 사이의 방향의 차이 즉 각에 대한 정보를 준다. 아주 중요한 특별한 경우는



$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = (1,0,1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{OB} = (0,1,2)$$

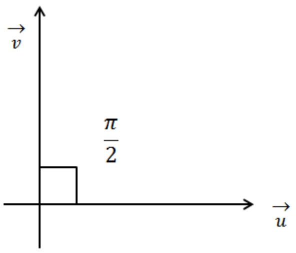
$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+4}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = 50.8^{\circ}$$

두 벡터가 수직인 경우이다. 각=90도 => cos 90 =0

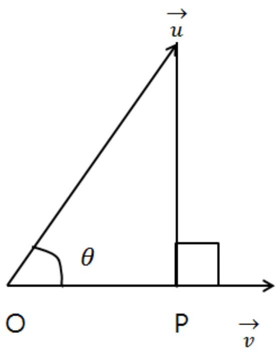
$\vec{u}$ and $\vec{v}$ are orthogonal (or perpendicular) $\leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

7. Orthogonal (or vector) projection of $\vec{u}$ onto $\vec{v}$

(벡터 u의 벡터 v에 대한 정사영)



(P는 벡터 v 위의 점으로 벡터 OP와 P와 벡터 u의 종점을 연결한 벡터가 서로 수직이 되는 점이다. 즉 u의 종점에서 v위에 내린 수선의 발이다.)

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \overrightarrow{OP}$$

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = k\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\rightarrow\ k = |\vec{u}|\cos\theta = |\overrightarrow{OP}|$$

$$= |\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ is called "Scalar component of $\vec{u}$ in the direction of $\vec{v}$ (u의 v방향의 성분)

Ex) Vector projection (정사영) of $\vec{u} = (6,3,2)$ onto $\vec{v} = (1,-2,-2)$

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{(6-6-4)}{1+4+4}\vec{v} = -\frac{4}{9}\vec{v}$$

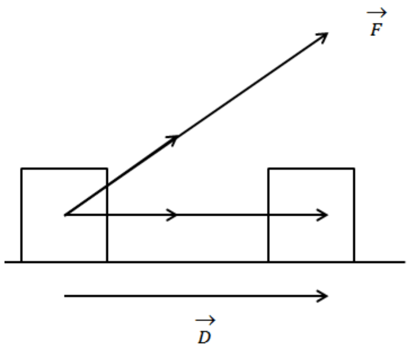
(u의 v방향의 성분) => -4/3

정의) WORK = $\begin{pmatrix} Scalar\ component\ of\ \vec{F} \\ in\ the\ direction\ of\ \vec{D} \end{pmatrix} \times |\vec{D}|$

$$= |\vec{F}|\cos\theta|\vec{D}|$$

$$= \vec{F}\cdot\vec{D}$$

(theta = angle between $\vec{F}$ and $\vec{D}$)



The work done by a constant force F during a displacement D