Module Taylor series

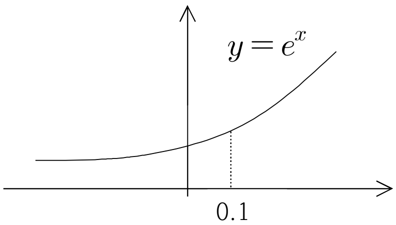
- Taylor 급수
- Taylor 다항식, Taylor 근사 (모듈13)
- 테일러 근사의 오차 계산 (테일러 정리)

Motivation

전자 계산기는 $e^{0.1}$ 값을 어떻게 계산할까?
자연수에서 출발하여 사칙연산만을 사용하여 계산하기.

$f(x)=e^x$ 에서 x=0의 함수값은 1이다. 0.1은 0에 가까운 값이다. 따라서 $e^{0.1}$은 x=0에서의 함수값 1에 가까울 것이다. 얼마나 가까울 것인가?

$x=0$ 부근에서 e^x와 비슷한 함수값을 갖는 다항식을 찾을 수 있을까?



* $x=0$일 때 접선의 식은 $y=1+x$

=> $e^x \approx 1+x$ for x near 0

=>

$$e^{0.1} \approx 1+0.1=1.1$$

이때 오차 $e^{0.1}-1.1$ 은 얼마나 될까?

-주어진 함수의 그래프는 곡선이다. 반면 일차함수의 그래프는 직선.
주어진 함수의 휘어진 정도를 반영하려면 차수가 높은 다항식을 사용?
=> 이차식 가운데 좋은 근사식을 찾아보자.
=> 다음 이차식의 이차항의 계수 a를 무엇으로 하면 좋을까?

$$p_2(x)=1+x+ax^2$$

=> 처음의 일차함수에 2차항을 더하면 그래프에서 직선을 휘게 할 수 있다.
휘어진 정도는 2계미분에 반영되므로 근사2차다항식과 원래의 함수가 원점에서 2계미분이 같도록 한다.

=> $p_2''(0) = 2a = (e^x)''|_{x=0} = 1 => a = 1/2$

(관찰을 일반화 하기)

일반적으로 한점 $x = c$ 부근에서 함수 $f(x)$를 그리기 위한 정보는 $f(c), f'(c), \cdots, f^{(n)}(c), \cdots$ 에 들어있다. 근사 다항식에 이 정보를 어떻게 옮길 것인가?

=> n차 근사 다항식

$p_n(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$

이를 이용하여 f(x)를 $x = c$에서 근사한다.

(조건) f(x)와 $p_n(x)$는 x=c에서 n계 미분까지 일치해야한다.

=>

$p_n(c) = a_0 = f(c)$,

$p_n'(c) = a_1 = f'(c)$,

$p_n''(c) = 2a_2 = f''(c)$,

...,

$p_n^{(n)}(c) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = f^{(n)}(c)$

=> $a_0 = f(c),\ a_1 = f'(c),\ a_2 = \dfrac{f''(c)}{2},\ \ldots,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

(n차 근사다항식의 모든 계수가 결정됨)

=> $p_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

(정의) $f(x)$의 center $x = c$ 에서의 n차 Taylor polynomial (테일러 다항식)은 다음과 같이 정의 된다:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

=>(c, f(c))를 지나는 다항함수

예제) $f(x) = e^x$ 의 center x=0에서의 n차 Taylor다항식 =>

$f^{(k)}(x) = e^x => f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

=> $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$

차수가 커질수록 더 좋은 근사를 할 수 있는 즉 오차가 줄어드는 근사 다항식이 된다.

예제

$f(x) = \sin x$의 center $x = \pi$에서의 3차 테일러 다항식은 다음과 같다.

$f(\pi) = \sin\pi = 0,\ f'(x) = \cos x,\ f'(\pi) = -1$

$f''(x) = -\sin x,\ \ f''(\pi) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(\pi) = 1$

$$T_3 f(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$

$$= -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3$$

정의) 함수 f(x)에 대해서 center x=c에서의 테일러 급수 (Taylor series)

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

=> 테일러 급수는 부분합이 테일러 다항식인 power series이다. 테일러 다항식의 수열들은 주어진 함수에 점점 더 가까워지는 다항 함수들의 수열로 이해할 수 있다.

기대하는 바는 테일러 다항식들의 수열의 극한값 즉 테일러 급수가 주어진 함수와 같아지는 것이다. 즉

$$\mathrm{T}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \text{ on } (c-r, c+r)$$

여기서 r=테일러 급수의 수렴 반경 (Tf(x) =f(x) ? 나중에 다룸)

*테일러 급수의 계수를 테일러계수(Taylor coefficient)라고 부른다.

예제) $f(x) = \sin x$의 center x=0에서의 테일러 급수를 구하여라

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x,\ f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$

=> $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,\ f^{(2k)}(0) = 0$

=> $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

예제) 어떤 함수에 대해서는 미분을 하지 않고도 테일러 급수를 구할 수 있다.

$f(x)=\frac{1}{1+x}$ 의 center $x=0$에서의 테일러 급수를 구하여라.

이 함수는 power series representation을 쉽게 구할 수 있다.

(기하급수: sum r^n = 1 /(1-r), |r|<1)

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,(|x|<1)$$

이렇게 구한 멱급수는 center x=0에서의 테일러 급수와 일치 한다.

(왜 그럴까? 어떤함수가 x=c에서 멱급수표현을 갖는다. 멱급수 계수=테일러계수 (<=) x=c에서의 미분조건)

Exercise) 위의 문제에서 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n$가 됨을 f(x)를 직접 미분해서 확인하라.

예제

$f(x)=\frac{1}{x}$ 의 center $x=1$에서의 n차 테일러 다항식을 구하여 보자.

먼저 center $x=1$에서의 테일러 급수를 구한다.

다시 한번 미분하지 않고 구할 수 있다. (Geometric series를 다시 이용한다)

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x-1}=\frac{1}{1-(-1)(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

등식은 $|x-1|<1$ 에서 성립

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ => center $x=1$에서의 테일러 급수

테일러 다항식은 테일러 급수의 부분합

=> $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k$

예제) 주어진 함수의 테일러 급수를 구할 때 미분을 직접 계산하지 않고 할 수 있는 경우들이 있다. 가령 테일러 급수를 이미 알고 있는 함수들의 곱이나 quotient로 주어지는 경우

f(x)=$e^x\sin x$의 $x=0$에서의 Taylor 급수를 구하여 보자.

=> $f(x) = e^x \sin x$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right)$$

$$\sum a_n x^n \sum b_n x^n$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k + \cdots$$

임을 이용하면 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}, \cdots$

$b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -\frac{1}{3!}, \cdots$

이 되어 원하는 급수는 $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ 이다. (3차항 = 1/2 - 1/6 = 1/3

연습문제) 다음 함수의 center x=0에서의 Taylor series를 구하여라

(1) $\sin(x^2)$

(2) $\frac{\sin x}{x}$

(3) $\frac{(1 - \cos x)}{x^2}$

다음시간 => (center x=c) 원래 함수 f(x)와 이 함수의 테일러 다항식의 차이 =오차 =?

테일러 근사의 오차 계산 (테일러 정리)

Question) Error = $f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + f^{(n)}(c)/n!(x-c)^n)$?

$e^x \approx \ 1+x+\frac{1}{2}x^2$

$e^{0.1}-(1+0.1+\frac{1}{2}(0.1)^2)=?$

Taylor 정리. f 가 c를 포함하는 열린 구간 I 에서 정의되고 n번 미분 가능한 함수라고 하자. 그러면 임의의 $x \in I$ 에 대해

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x-c)^n$

이 되는 x^* 가 c와 x사이에 존재한다.

정리를 다시 기술하자면

$f(x)-T_{n-1}f(x)=\frac{f^{(n)}(x*)}{n!}(x-c)^n$ (x in I)

여기서 오차항에 해당하는 항을 Taylor remainder term (나머지항) 이라고 부른다.

$$R_nf(x)=\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x-c)^n$$

Remark) 테일러 정리는 평균값의 정리의 일반화로 볼 수 있다.
평균값 정리

[a,b]에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능한 함수 f에 대해서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$가 되는 $c \in (a,b)$가 존재한다.

=> $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

예제) $f(x)=e^x$ 의 center $x=0$ 에 대해 테일러 정리를 적용해보자.

$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+R_n(x)$ 로서 나머지 항은 $R_n(x)=\frac{e^c}{n!}x^n$ 이다.

여기서 c는 0과 x 사이에 있는 어떤 수이다.

x=-0.5 인 경우 n=3 즉 2차 근사를 하면

$e^{-0.5}=1+(-0.5)+\frac{1}{2}(-0.5)^2+\frac{1}{6}e^c(-0.5)^3$이

$|e^{-0.5}-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})|=\frac{1}{6}|e^c|\times\frac{1}{8}\le\frac{1}{48}$

여기서 오차를 평가할 수 있는데 -0.5 < c < 0 이므로 $e^c<1$임을 이용하면 오차가 1/48 보다 작음을 알 수 있다.

예제) $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ 임을 보여라.

주어진 함수의 주어진 center에서의 테일러급수가 수렴구간에서 주어진 함수와 같을 것인가라는 기본 질문이 있다. 테일러 정리를 이용하면 이에 답할 수 있다.

테일러 정리를 적용하면 $e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^c}{n!}x^n$ 여기서 테일러 나머지항을 살펴본다.

$\lim_{n\to\infty}|\frac{e^c}{n!}x^n|=0$ 임을 보이면 된다.

$|\frac{e^c}{n!}x^n|\le M\frac{|x|^n}{n!}$ 여기서 M= max { 1, e^x }

x>0 이면 $e^c<e^x$ 이고 x< 0 이면 $e^c<e^0=1$ 이기 때문.

$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$은 다음과 같이 보일 수 있다.

충분히 큰 자연수 N을 선택하여 $N>2|x|$가 되게 하면 n>N 일 때

$$\frac{|x|}{1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{|x|}{n}<\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\cdot(\frac{1}{2})^{n-N+1}$$

우변은 n-> ∞ 일 때 0 으로 수렴

Remark) 일반적으로 f(x)의 x=c에서의 테일러 급수와 f(x)는 같지 않다.
만약 함수가 x=c에서 자신의 테일러 급수와 같으면 x=c에서 analytic 이라고 한다.

예제) sin (0.5) 의 근사값을 오차 1/1000의 범위에서 구하여라.

테일러 정리를 적용하면 center 0 (0.5는 0에 가까운 값이므로) 에서

sin x = $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+0x^{2n+2}+\frac{\pm\cos c}{(2n+3)!}x^{2n+3}$

2n+1차의 근사를 하면 오차항은 2n+3차가 된다. 짝수차 항이 0이기 때문이다.

x=0.5 일 때 오차항은 $\left|\dfrac{\pm\cos c}{(2n+3)!}(0.5)^{2n+3}\right| \le \dfrac{1}{(2n+3)!}\dfrac{1}{2^{2n+3}}$

이 값이 1/1000보다 작게 되는 최초의 n을 구하면 된다.

n=0이면 분모는 $3!\times 2^3=6\times 8=48$ 오차는 1/1000보다 클 수 있다.

n=1 이면 분모는 $5!\times 2^5=120\times 32>120\times 30=3600>1000$ 이므로 오차는 1/1000보다 작다.

주어진 오차의 범위를 만족하는 근사는

sin (0.5) ≈ 1/2 - 1/48 = 23/48 (오차 < 1/3600 < 1/1000)

Remark) 주어진 문제마다 center를 어떤 것으로 잡아야 할지 생각해보아야 한다.
만약 sin3을 근사하려고 한다면 center는 pi로 잡는 것이 좋다. (pi가 3에 가까운 값이므로)

예제) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$을 오차 10^{-3} 범위에서 근사값을 구하여라.

풀이. $\displaystyle e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

$\displaystyle e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}x^{2n+2}$ 이고 이때 $-x^2<c<0$ 이다.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{k!}\frac{1}{2k+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^1 e^c\,x^{2n+2}dx$$

$\displaystyle\epsilon=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^1 e^c x^{2n+2}dx$ 이라고 하면

$\displaystyle|\epsilon|=\frac{1}{(n+1)!}\left|\int_0^1 e^c\,x^{2n+2}dx\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{2n+2}dx=\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$

이다. (e^c <1)

$\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{1}{2n+3}<10^{-3}$ 이 되도록 하려면 $n=4$로 하면 충분하다.

(n=3이면 1/216, n=4 이면 1/1200보다 작다)

따라서

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{4!\cdot 9}$$

$$= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}$$

$$\approx 0.7475$$

오차의 범위는 1/1000보다 작다.