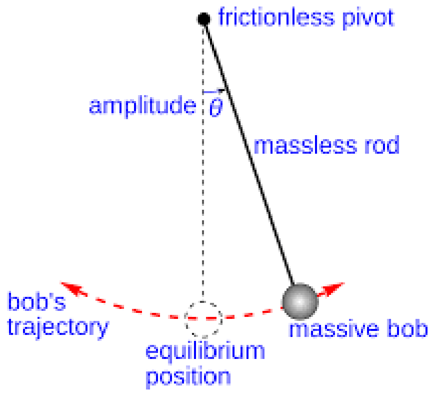
Module Power series

- Power series
- 수렴반경과 수렴구간
- Power series의 미분과 적분

(교과서 module 12)

Motivation

진자의 주기 (period of pendulum)



주기 $T = 2\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx$

여기서 $k = \sin(\theta/2)$

$f(t) = (1+t)^{-1/2}$ => 다항함수로 근사

$f(-k^2\sin^2 x)$

----

1. power series(멱급수)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

x는 변수 => x의 값을 정할 때 무한급수가 정해진다.

여기서 a_n을 power series의 계수 coefficient라고 한다.

(부분합이 다항함수인 무한급수를 power series라고 한다)

예제 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

x=0 대입하면 급수는 1

x=1/2 대입하면 $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$

x= -1을 대입하면 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$ 발산한다.

함수로서 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots$ 는 -1<x<1 에서만 정의된다. (수렴한다)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

=> 부분합 $\sum_{n=0}^{N} x^n \rightarrow \frac{1}{1-x}$

(기본질문)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ 는 어떤 값에 대해 수렴하는가?

무한급수에 대한 수렴판정법 사용.
각 항의 부호가 일정하지 않기 때문에 언제 절대수렴을 확인

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$이 수렴할 x의 조건을 찾아라

비율판정법 (또는 root test)을 적용

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$ (일 때 수렴) => $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1$

=> $|x| < 1/\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

정의 $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ (>0) 를 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ 의 수렴반경 (radius of convergence)이라고 한다.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ 는 -R<x<R에서 절대수렴한다 (따라서 수렴한다)

Question) 수렴반경이 정하는 영역이 주어진 power series가 수렴하는 최대 영역인가?

정리. 만약 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 한 점 $x = x_0$ 에서 수렴하면, $|x| < |x_0|$ 인 모든 x에서 이 멱급수는 절대수렴한다.

예제) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$는 x=1에서 수렴한다 (왜 그러한가?)

위 정리가 참이라면 이 멱급수는 -1 < x <1 인 모든 x에 대해 절대수렴한다 (따라서 수렴한다)

(정리의 IDEA)

급수 $\sum a_n x_0^n$ 이 수렴하면, $\lim_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$ => n이 충분히 크면 |a_n x_0^n | <1

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| |\frac{x}{x_0}|^n \leq |\frac{x}{x_0}|^n$

비교판정법 => $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ (우변은 ratio가 1보다 작은 geometric series)

정리 만약 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$이 한 점 x=d 에서 발산하면, $|x| > |d|$ 인 모든 x에서 이 멱급수는 발산한다

(귀류법을 이용하여 증명가능)

위의 두 정리로 부터의 결론

=> 멱급수의 수렴 영역은 원점을 중심으로 반경 a인 구간을 점점 키워가다가 발산하는 지점에서 멈춘다. 그 바깥에서는 모든 점에서 발산함.

(+) 수렴반경은 =0, 또는 양수이거나 또는 $+\infty$ 이다.

정의 수렴구간 (Interval of convergence) 주어진 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 가 수렴하는 최대의 구간. R을 수렴반경이라고 하면 수렴구간은 (-R, R)이거나 [-R, R), (-R, R], [-R, R] 네 가지 중 하나가 된다. 이

예제) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

=> R= 1/0= $+\infty$

보다 일반적으로, 멱급수를

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

형태로 생각할 수 있다. $x=c$ (center of power series)인 경우에는 물론 멱급수 S의 값이 a_0로 당연히 수렴한다. 따라서 이 경우에는 c가 원점 대신 기준점이 될 것이다.

수렴반경은 c=0일 때와 동일하다. 계수에만 의존하기 때문이다.

함수로서 멱급수를 c만큼 이동한 것으로 이해 => 수렴영역 (-R, R)은 (c-R, c+R)로 이동 (여기서 center 0가 center c로 이동)

예제) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-2)^n$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ => R=1 (수렴반경)

기본 수렴영역은 |x-2|<1 즉 (2-1, 2+1)=(1, 3)
수렴구간(interval of convergence(을 구하기 위해서는 구간의 양 끝점을 확인

x=1 => $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 는 조화급수(p-sereis 중에서 p=1, p-series는 p가 1보다 커야 수렴한다) 이므로 발산한다.

x=3 => $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (교대급수이고 교대급수판정법을 적용하면) 수렴한다.

=> 수렴구간은 $1<x\le 3$이다.

연습문제

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}(x+1)^n$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n^2}$의 수렴반경과 수렴구간을 구하시오.

----

2. power series의 미분과 적분

f(x)= $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$ (-1< x <1)

(1) 부분합은 다항함수이고 미분가능하다.

함수로서 미분가능한지 물어보는 것은 자연스럽다.

=> $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$?

(2) 부정적분은?

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ ?$$

=> 위의 두 질문은 미분연산자를 무한합과 적용순서를 바꿀 수 있는지 묻는 것과 같다.

마찬가지로 적분연산자를 무한합과 적용순서를 바꿀 수 있는지 묻는 것과 같다.

정리. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 의 수렴반경이 $r>0$ 이라고 하자.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 와 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$의 수렴반경도 r이다.

(ii) $-r < x < r$ 에서 $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 로 두면 f 는 미분가능하며

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$ 이다.

(iii) $-r < x < r$ 일 때 $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 이다.

보기. $(-1,1)$에서 정의된 함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

미분 가능하며, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ 이고 이 급수의 수렴반경도 1이다.

보기. $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 일 때 a_n 을 구하여보자. 이때 수렴반경은 얼마인가?

(1) $|x| < 1$ 에서 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 임을 이용한다.

(2) 양변을 각각 미분하면 $\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ 이고

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$ 이므로 $a_n = n+1$이고

수렴반경이 1이다.

연습문제. $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 일 때 a_n 과 수렴반경을 구하여라.

(힌트. $|x| < 1$ 일 때 $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 임을 이용)

----

power series의 미적분은 어떤 함수에 대한 power series 표현을 얻을 수 있게 해준다.

예제) 원점 근처에서 $\ln(1+x)$가 되는 power series는 무엇인가?

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ?$$

ln (1+x)는 $\frac{1}{1+x}$의 부정적분이며 $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ (-1< x <1) 이므로 power series의 적분을 이용한다.

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\, dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$ (수렴반경=1 => (-1, 1) 위에서 성립)

(응용) 이를 이용하여 ln2의 값을 근사하라. (주의: 위의 등식은 (-1, 1)에서만 성립함. x=1에서 성립하는지는 알 수 없음. 따라서 아이디어가 필요함!!)