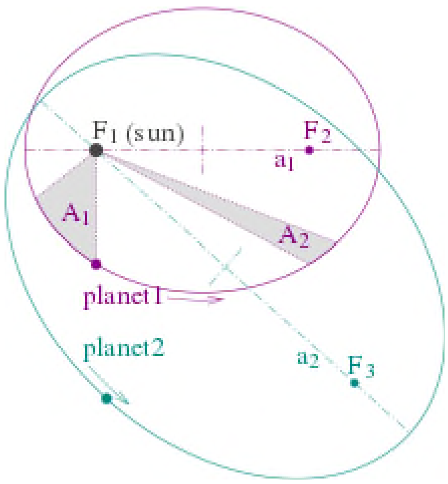
Module Polar coordinates

- Polar coordinates (모듈 16)
- Study of plane curve in polar coordinates (모듈 17)
- Areas in polar coordinates

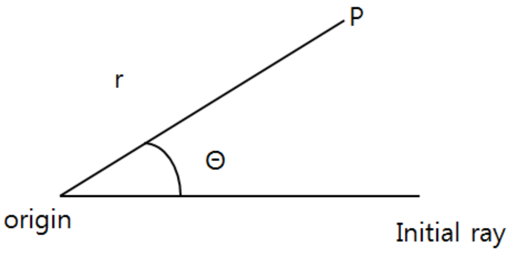
Question 일정한 각속도로 돌고 있는 원판 위에 서 있는 사람이 원판의 중심에서 가장자리의 한 지점을 향하여 일정한 속력으로 걸어가고 있을 때 위에서 내려다보면 이 사람이 움직인 자취는 어떤 곡선일까?

Question 태양 주위를 도는 행성의 궤도를 설명하는 좋은 방법은?



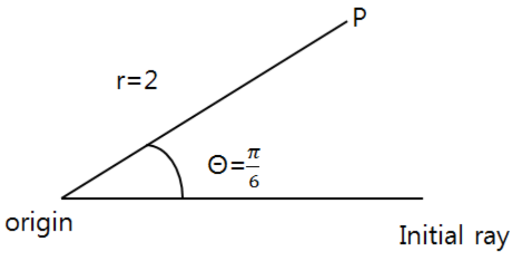
평면 위의 한 점에 위치를 부여하는 방법. 좌표를 도입.
직교 좌표는 기준점을 지나는 서로 수직인 두 직선을 사용하여 좌표를 부여함.
기준점에서의 거리와 방향만으로도 위치를 결정할 수 있음.

극좌표: 평면 위의 한 점을 고정하고 이점을 O라고 하자. 이 점에서 반직선을 그린다.
점 O를 극점, 반직선을 극축이라고 부른다.
평면 위의 한 점의 위치를 (r, θ), 즉, 점 O로 부터의 거리 r과 극축으로부터 반시계방향으로 잰 각도 θ로 나타낸 것을 극좌표(polar coordinates)라고 부른다.

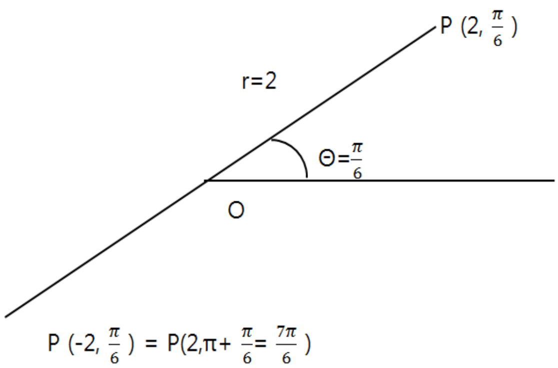


여기서 r은 directed distance, 즉 음수가 될 수도 있다.

Example)



P$(2,\frac{\pi}{6})$



P$(2,\frac{\pi}{6})$=P$(2,2\pi+\frac{\pi}{6})$=P$(2,-2\pi+\frac{\pi}{6})$

= P$(2,2n\pi+\frac{\pi}{6})$ $\quad n=\pm 1,\pm 2,\cdots$

are the polar coordinates for the same point.

P$(-2,\ \pi+\frac{\pi}{6})$ = P$\left(-2,2n\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

극좌표에서 r값으로 음수를 사용하기도 한다. $r<0$ 일 때에는 θ 가 가리키는 방향과 반대방향으로 거리 $-r$만큼 떨어진 점을 뜻한다. 즉,

$$(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)$$

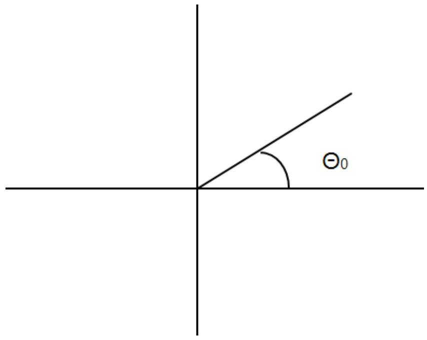
이다. 또한, 각도가 음수일 때는 반대방향 즉, 시계방향으로 잰 각도를 의미한다.

1. Polar Equations

(1) Circle of radius a centered at O $(a > 0)$

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad r = a$$ (극좌표를 이용한 원의 방정식)

(2) Line through O making an angle θ_0 with the initial ray



$$y = \tan\theta_0 x$$
$$\theta = \theta_0$$

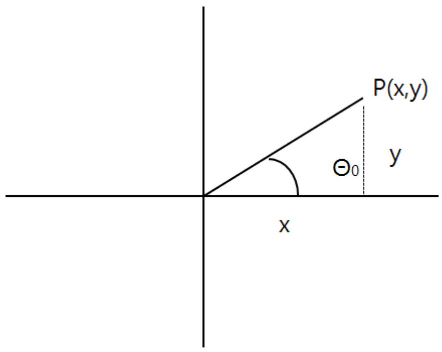
극좌표를 이용한 직선의 방정식

Ex) 극좌표를 이용한 영역의 표현

$\{(r,\theta) \mid a < r < b\}$: 링 모양의 영역

$\{(r,\theta) \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$: 부채꼴 모양의 영역 (r이 양수, 음수 모두 포함됨)

극좌표와 직교 좌표 사이의 관계



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Example) 직교좌표로 $(1, \sqrt{3})$인 점의 극좌표는 ?

$r = \sqrt{1+3} = 2$

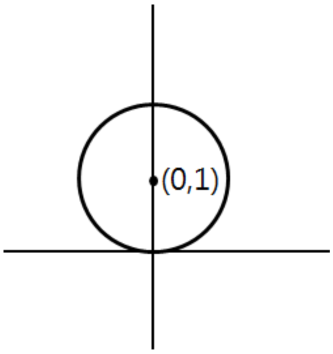
$\tan\theta = \sqrt{3} => \theta = \pi/3$

Example) 극좌표로 $(1, -\frac{\pi}{4})$ 인 점의 직교 좌표는 ?

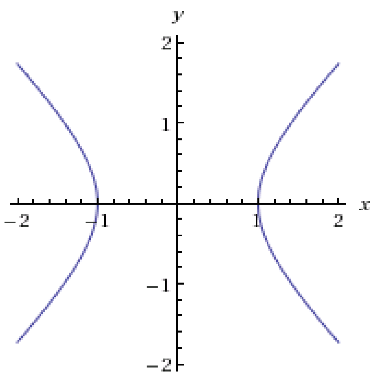
$r=1,\ \theta=-\pi/4$

$x=rcos\theta=\cos(-\pi/4)=\sqrt{2}/2,\ \ y=rsin\theta=\sin(-\pi/4)=-\sqrt{2}/2$

Ex) Equations in Cartesian and polar coordinates



$$x^2+(y-1)^2=1$$
$$x^2+y^2-2y=0$$
$$r^2-2r\sin\theta=0$$
$$r=2\sin\theta$$



$$x^2-y^2=1$$

$$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$$
$$r^2\cos 2\theta=1 \qquad \cos 2\theta>0$$
$$|2\theta|<\frac{\pi}{2} \qquad |\theta|<\frac{\pi}{4}$$

$$r^2=\frac{1}{\cos 2\theta}=\sec 2\theta$$
$$r=\pm\sqrt{\sec 2\theta}$$

Example) Replace polar equations by equivalent Cartesian equations.

1) $r\cos\theta=-4$

$x=-4$ Vertical line through $x=-4$

2) $r = 4\cos\theta$

$r^2 = 4r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = 4x$ $\qquad$ $x^2 - 4x + y^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ $\qquad$ $(2,0)$

중심이 (2,0) 이고 반지름이 2인 원

3) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

$2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$

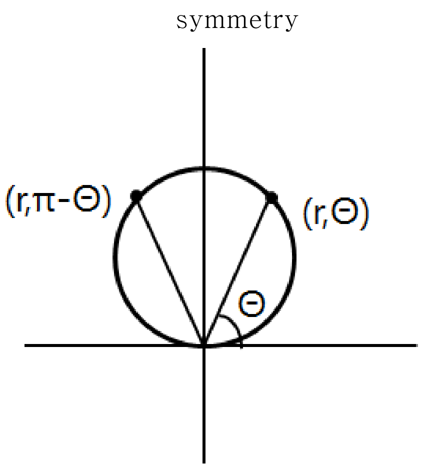
$2x - y = 4$

$y = 2x - 4$

2. 극좌표로 주어진 곡선의 방정식이 나타내는 곡선 그리기

*대칭성 살펴보기

Ex) $r = 2\sin\theta$

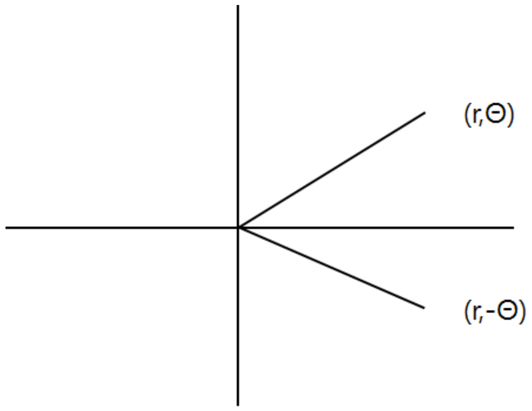


Symmetric w.r.t. y-axis

$r = 2\sin(\pi - \theta)$
$= 2\sin\theta$

Ex) $r = 1 - \cos\theta$

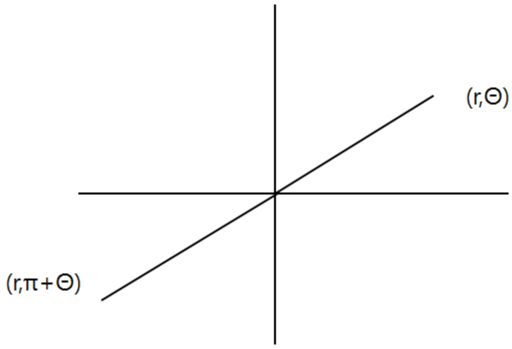
$r = 1 - \cos(-\theta) = 1 - \cos\theta$



Symmetric w.r.t. x-axis

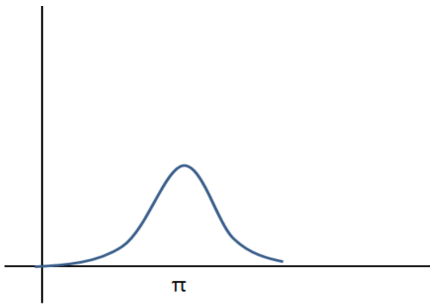
Ex) $r^2 = \sin 2\theta$

$$r^2 = \sin(2(\pi+\theta))$$
$$= \sin(2\pi + 2\theta) = \sin 2\theta$$
$$(r,\theta) \in curve \rightarrow (r, \pi+\theta) \in curve$$

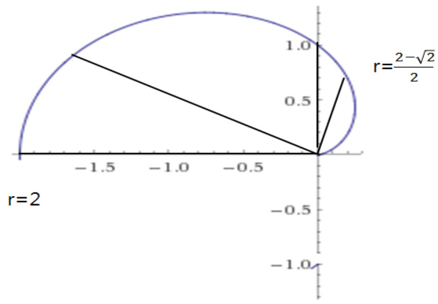


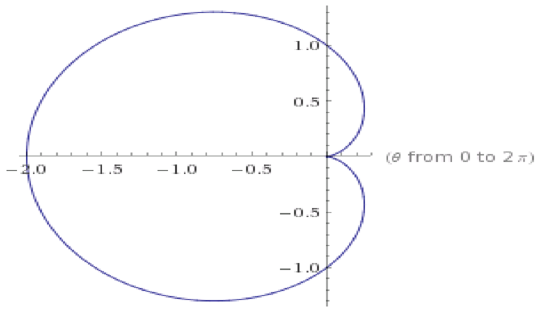
Symmetric w.r.t. origin

Example) $r = 1 - \cos\theta$



θ	r
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 0 = 1$
$\frac{3\pi}{4}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
π	$1 - (-2) = 2$





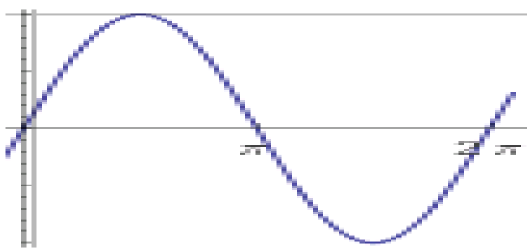
“Cardioid"

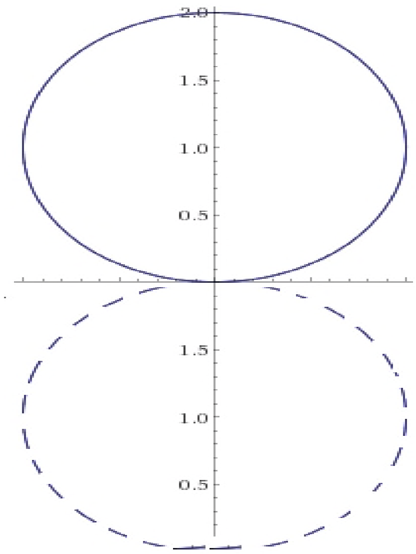
STEP 1. r-theta 그래프 그리기

STEP 2. 좌표평면 상에 양의 x축을 기준으로 각 방향에 해당하는 r의 값 대응 시키기. 각은 0에서 시작하여 2pi 까지 변화시킨다.

대칭성 살펴보기 (r,θ)가 방정식을 만족하면 $(r,2\pi-\theta)$도 방정식을 만족한다
=> 곡선은 x축에 대해 대칭

Example) $r=2\sin\theta$



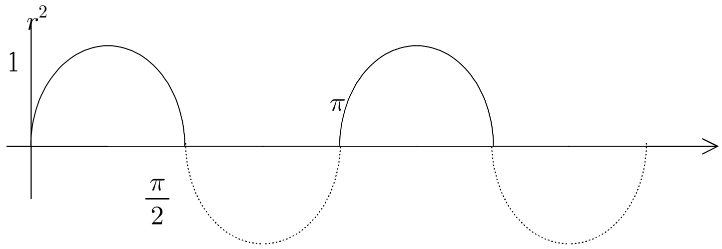


θ	r
$\frac{5}{4}\pi=\pi+\frac{\pi}{4}$	$-2\sin\frac{\pi}{4}=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$
$\frac{3}{2}\pi=\pi+\frac{\pi}{2}$	$-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$
$\frac{7}{4}\pi=\pi+\frac{3}{4}\pi$	$-2\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$
2π	

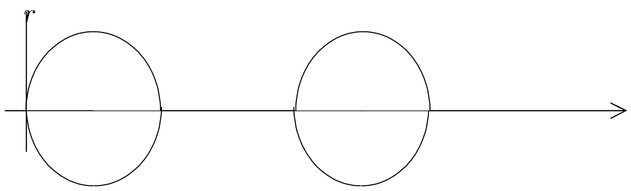
theta 가 0에서 pi/2로 변할 때 r의 값은 증가한다.
pi/2에서 pi로 변할 때 r의 값은 감소한다.

theta 가 pi에서 2pi로 변할 때 r의 값은 음수가 된다. 각이 지향하는 방향의 반대 방향의 점이다. => 원 위를 다시 한 번 움직인다.

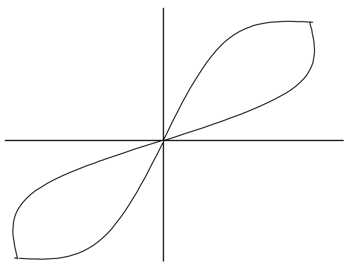
보기: 극좌표로 $r^2 = \sin 2\theta$ (lemniscate) 인 도형의 개형을 그려보아라.



$r^2 = \sin 2\theta$

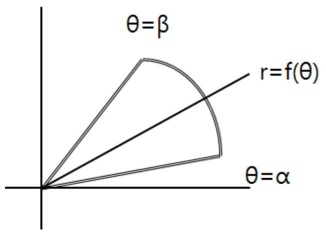


$r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$



θ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
$\frac{\pi}{4}$	± 1
$\frac{\pi}{3}$	$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3. Areas in polar coordinates



극좌표로 주어진 영역의 면적

$\{ (r,\theta) : 0 \le r \le f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta \}$

$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$ k-th sector. $\theta_{k-1} \le \theta \le \theta_k$

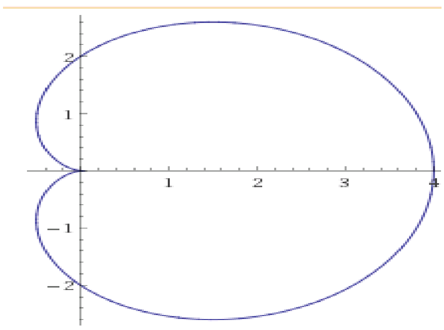
k-th sector의 근사 면적 =>

(부채꼴의 면적) $A_k = \frac{1}{2} f(\theta_k)^2 \Delta\theta_k$, $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$

전체 영역의 면적 $A \approx \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f(\theta_k)^2 \Delta\theta_k$

$$A = \lim_{|\Delta\theta| \to 0, n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A_k = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

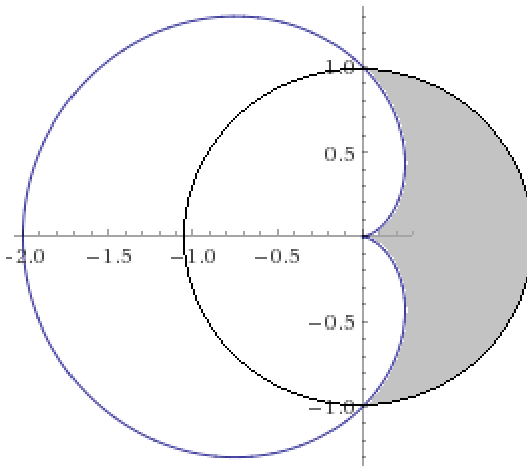
Example) Area of the region enclosed by curve $r = 2(1+\cos\theta)$

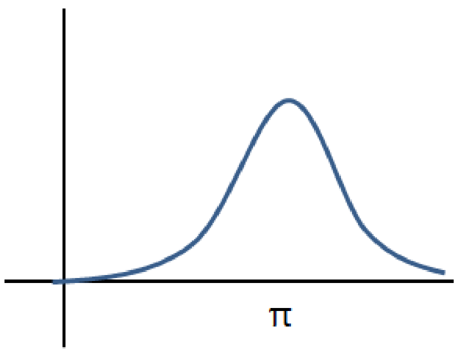


$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} 4(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

f(theta) = 2 (1+cos theta), 0 < theta < 2pi

Example) Outside of region enclosed by $r = 1 - \cos\theta$ and inside of the region $r = 1$





$1 - \cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0$
$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r_1^2d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r_2^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1-(1-\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta-\cos^2\theta\,d\theta$$