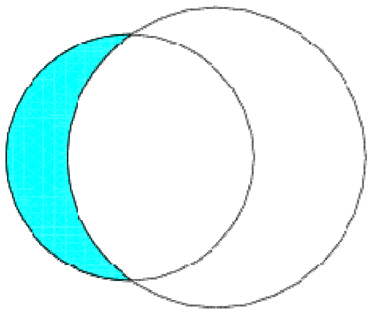
Module Inverse trigonometric functions

1. 삼각함수를 이용한 치환

Motivation)

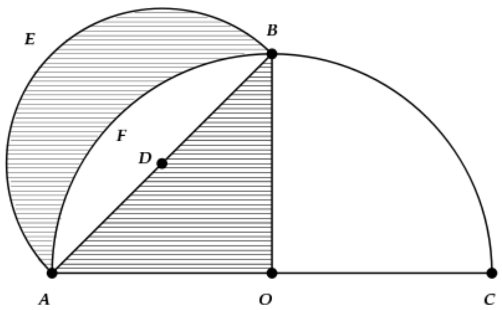
(1) 초생달(Lune)의 면적을 구하는 문제



두 개의 반지름이 다른 원 사이에 끼인 영역의 면적 구하기

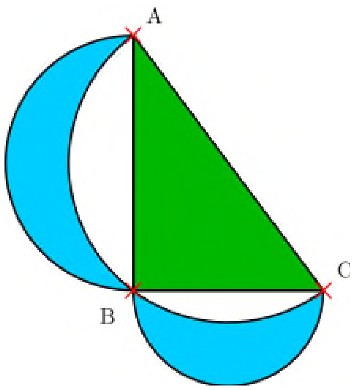
(2) Hippocrates of Chio (기원전 5세기)가 생각했던 문제

(고대 그리스의 유명한 기하학 문제에서 유래: 주어진 원과 같은 면적을 갖는 정사각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는가?)



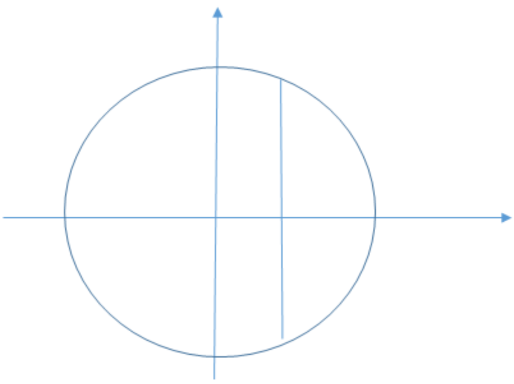
히포크라테스는 원호 E와 원호 F로 둘러싸인 lune의 면적인 삼각형 ABO와 같다는 것을 증명하였다. 여기서 원호 E를 갖는 원의 지름이 AB와 같아야 한다는 조건이 있다.

11세기의 아랍 수학자 하산 이븐 알하이탐 (서방세계에 Alhazen 으로 알려짐)도 유사한 문제를 생각함.



그림의 두 개의 lune의 면적의 합은 삼각형의 면적과 같다는 것을 증명

적분을 이용한 면적 구하기



원의 방정식 $x^2+y^2=4$ (반지름이 2인 원을 예로 생각해보자)

원호를 나타내는 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$

직선과 원호 사이의 면적

$$A=2\int_{\alpha}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

주어진 적분을 어떻게 계산할 것인가?

유사한 적분 $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$ 경우 $u=4-x^2$으로 치환하면 바로 적분할 수 있는 적분으로 바꿀 수 있다.

우리 적분의 경우: 아이디어 적당한 함수 $x=f(u)$를 선택해서 $4-f(u)^2=g(u)^2$형태로 변경이 가능하게 한다. 즉 $f(u)^2+g(u)^2=4$는 처음에 주어진 원의 방정식으로 궁극적으로 원에 대한 매개화 식을 찾는 문제와 같다.

Note: $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$

$f(u) = 2\sin u$로 선택하면

$$4 - f(u)^2 = 4 - 4\sin^2 u = 4(1 - \sin^2 u) = 4\cos^2 u$$

로 $g(u) = 2\cos u$가 된다.

$intsqrt4 - x^2 dx$문제에 대해 치환 $x = 2\sin u$로 치환을 한다.

*(여기서 $x = 2\cos u$로 치환하는 것도 괜찮을까?)

$\frac{dx}{du} = 2\cos u$ => $\int \sqrt{4 - 4\sin^2 u}\, \cos u\, du = \int 2\sqrt{\cos^2 u}\, cosu\ du = \pm 2\int \cos^2 u\, du$

본래의 적분은 cosine 함수의 제곱의 적분 문제로 바뀌었다. 이 문제는 본래 적분보다 계산하기 쉬운가?

반각 공식을 이용 $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$

$\int \cos^2 u du = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2u) du$

$= \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2u du = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{2} sin2u) + C$

u를 x에 대한 함수로 표현하려면?

$x = 2\sin u$를 u 에 대해 풀면 $u = \sin^{-1}(x/2)$

적분식은 $\frac{1}{2} sin^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{1 - (x/2)^2} +$ C

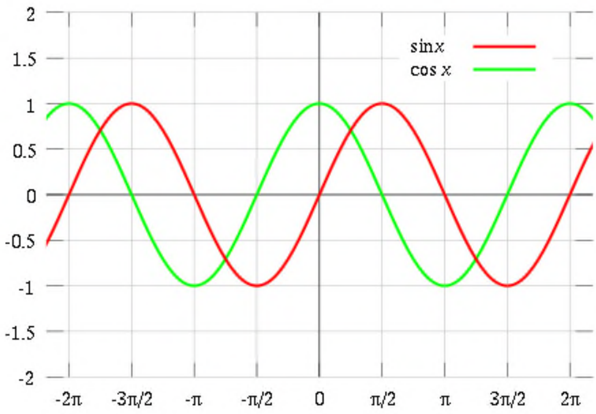
다시 생각해보기 (여기서 $x = 2\cos u$로 치환하는 것도 괜찮을까?)

생각해야 할 세 가지 문제

1) 삼각함수를 이용한 치환을 어떤 상황에 일반적으로 적용할 수 있을까?

2) 삼각함수의 power로 표현된 함수를 어떻게 적분할 것인가?

3) sine 함수나 그 밖의 삼각함수의 역함수는 잘 정의되는가?



2. 삼각함수의 power의 적분

$\int \sin^n x\, dx$, $\int \cos^n x\, dx$ 형태의 적분을 어떻게 계산할 것인가?

(1) n이 홀수인 경우

$n = 2k+1$ 로 두고 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 임을 이용하여 치환적분을 한다.

$$\int \sin^{2k+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x\, dx$$

$u = \cos x$ 로 치환하면 $du = -\sin x\, dx$이다.

$$\int (1-\cos^2 x)^k \sin x\, dx = \int (1-u^2)^k (-1) du$$

Example $\int \cos^5 x\, dx$ 의 계산 (cosine 함수의 power도 동일한 방식으로 계산)

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x\, (\cos x) dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$
$$= \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4) du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3} sin^3 x + \frac{1}{5} sin^5 x + C$$

(2) n이 짝수인 경우

$n=2k$로 두고 $\cos^2 x=\dfrac{1+2\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$를 이용한다.

Example $\int \cos^4 x\,dx=\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \dfrac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

차수가 4차에서 2차로 절반으로 줄어듬. $\int \cos^2 2x\,dx$ 도 위의 방법을 다시 적용

연습문제

(a) $\int \sin^4 x\,dx$을 계산하시오.

(b) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$을 계산하시오.

(3) $\int \sin mx\cos nx\,dx$의 계산

삼각함수의 합의 법칙 $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$ 을 이용하면

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x]$$

를 얻는다.

$\dfrac{1}{2}\int \sin(m-n)x+\sin(m+n)x\,dx$

$$= \begin{cases} (-1/2)\left[\dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}+\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n}\right], & m^2\neq n^2 \\ -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}, & m=n\neq 0 \\ -\dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}, & m=-n\neq 0 \end{cases}$$

연습문제 $\int \cos mx\ \cos nx\,dx$

(4) Reduction formula를 이용한 방법

(a) $\int \tan^n x\,dx$을 계산하는 법

n=2인 경우 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$

n=3인 경우

$$\int \tan^3 x dx = \int (\tan^2 x \tan x) dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx$$

$$= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$

첫 번째 적분 $u = \tan x$로 치환

$$\int u \frac{du}{dx} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} tan^2 x + C$$

n=4인 경우 (짝수인 경우)

$$\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan^2 dx$$

$$= \int \sec^2 x \tan^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

첫 번째 적분은 다시 $u = \tan x$로 치환. 두 번째 적분의 차수가 본래 적분의 차수의 절반으로 줄어든 것을 주목할 것.

(b) $\int \sec^n x \, dx$ 를 적분하는 법

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \sec x \, dx = \tan x \sec x - \int \tan x \sec x \tan x \, dx$$

$$= \tan x \sec x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$$

$$= \tan x \sec x - \int \sec^3 x - \sec x \, dx$$

=> $2 \int \sec^3 x \, dx = \tan x \sec x + \int \sec x \, dx$

(참고) $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

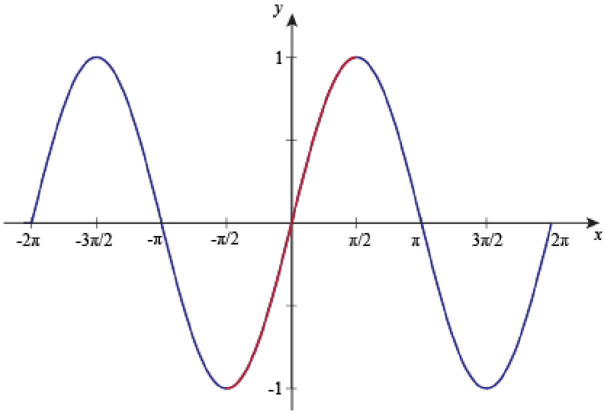
($\sec x + \tan x = u$ 로 치환)

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

3. 삼각 함수의 역함수

sine 함수는 일대일 대응 함수가 아니므로 역함수를 갖도록 하기 위해서 정의구역을 제한한다. 보통 $y = \sin x$에서 x=0을 포함하는 가장 큰 구간을 선택한다.

사인함수의 그래프



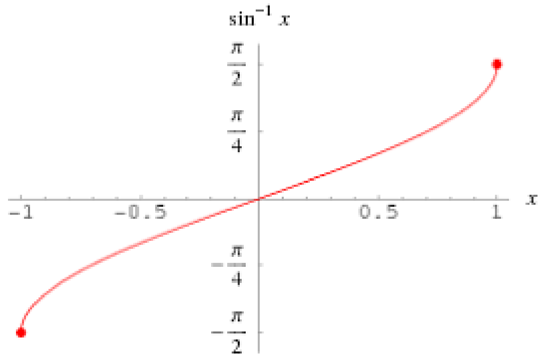
sine: $\{-\pi/2 \le x \le \pi/2\}$ --> $\{y: -1 \le y \le 1\}$

역함수를 생각

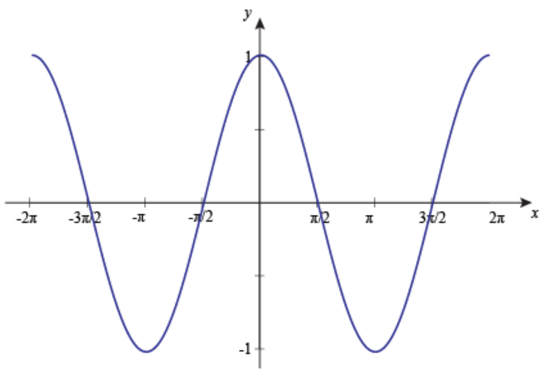
$x = \sin^{-1} y$: $\{y: -1 \le y \le 1\}$ --> $\{-\pi/2 \le x \le \pi/2\}$

x	y=sin x	y	$\sin^{-1} y$
0	0	0	0
$\pi/6$	1/2	1/2	$\pi/6$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\pi/2$	1	1	$\pi/2$

Inverse sine 함수의 그래프



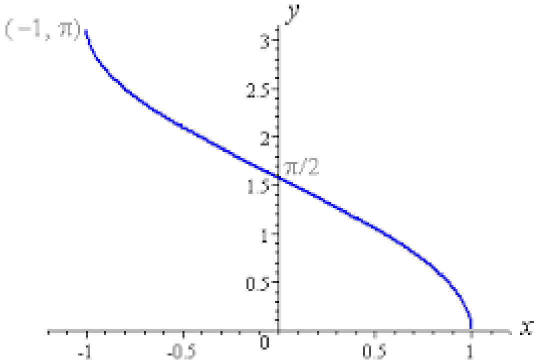
마찬가지로 cosine 함수에 대해서도 역함수를 정의할 수 있다.
cosine 함수의 정의구역을 $0 \le x \le \pi$로 제한하면 이 위에서 일대일 대응 함수가 된다.



$y = \cos x : \{0 \le x \le \pi\} \to \{-1 \le y \le 1\}$

$x = \cos^{-1} y : \{-1 \le y \le 1\} \to \{0 \le x \le \pi\}$

Inverse cosine 함수의 그래프

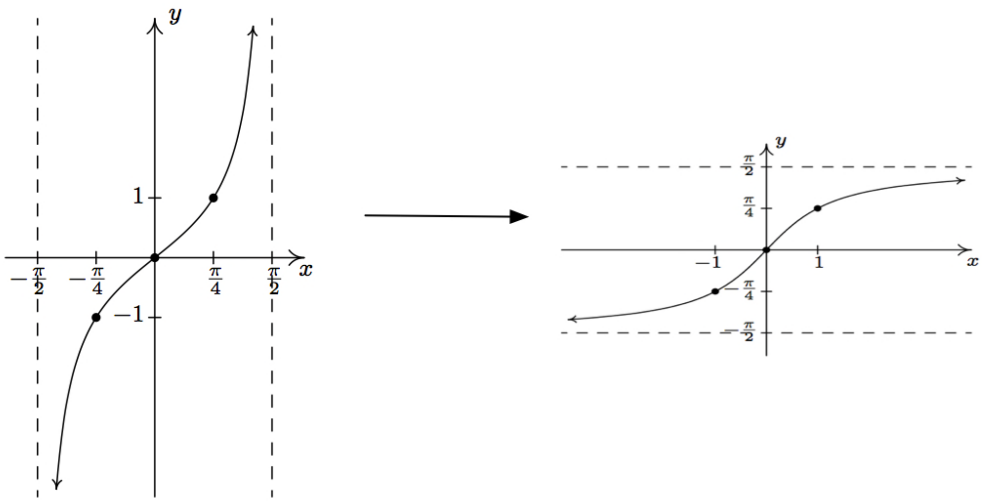


Tangent function의 역함수

일대일 대응이 되도록 정의구역을 $-\pi/2 < x < \pi/2$로 제한

$y = \tan x, \ -\pi/2 < x < \pi/2$

$x = \tan^{-1} y, \ y \in \boldsymbol{R}$



4. Trigonometric substitution 삼각함수를 이용한 치환적분

다음과 같이 세 가지 유형으로 나누어짐

$\sqrt{a^2 - x^2}$

$\sqrt{a^2 + x^2}$

$\sqrt{x^2 - a^2}$

(1) 첫 번째 경우 $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

$x = 2\sin u, \quad dx = 2\cos u\, du$

$$\int \sqrt{4-4\sin^2 u}\, 2\cos u\, du = 4\int |\cos u| \cos u\, du = 4\int \cos^2 u\, du$$

여기서

$x = 2\sin u$가 역함수를 갖기 위해서는 u의 범위를 $-\pi/2 \le u \le \pi/2$로 잡아야 한다. 여기서 sine 함수가 일대일 대응 함수이다. 이 범위에서 $\cos u \ge 0$ 따라서 $|\cos u| = \cos u$

연습) 적분의 계산을 완료하고 최종 식을 x에 대한 함수로 표현하시오.

(2) 두 번째 경우 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

$x = \tan u$, $1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = \sec^2 u$, $\quad dx = \sec^2 u du$

$$\int \sqrt{1+\tan^2 u}\, \sec^2 u\, du = \int \sqrt{\sec^2 u}\, sec^2 u\, du = \int |\sec u| \sec^2 u\, du$$

$$= \int \sec^3 u\, du$$

여기서 $x = \tan u$**가 역함수를** 갖기 위해서 u의 범위를 $-\pi/2 < u < \pi/2$로 잡아야 한다.

이 때 $\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$ >0.

연습) 적분의 계산을 완료하고 최종 식을 x에 대한 함수로 표현하시오.

(3) 세 번째 경우 $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ 를 이용. $x = \sec u$ 로 치환. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 u - 1} = \sqrt{\tan^2 u} = |\tan u|$

$dx = \sec u \tan u du$

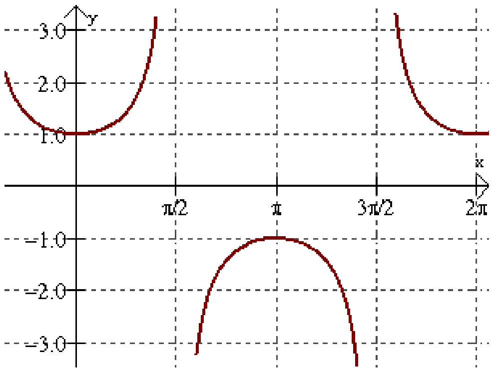
여기서 $x = \sec u$가 역함수를 갖기 위해서 u의 범위를 선택해야 한다.

$x^2 - 1 \ge 0$이므로 $x \ge 1$ or $x \le -1$

x의 범위에 따라서 u의 범위를 결정함

$x \ge 1 \quad \Rightarrow 0 \le u < \pi/2$

$x \le -1 \quad \Rightarrow \pi/2 < u \le \pi$



secant 함수의 그래프 ($(0,\pi)$에서 일대일 대응 함수가 된다)

u의 범위에 따라서 $|\tan u|$의 부호가 결정됨

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \pm \int \tan^2 u \sec u\,du$$

$$\int (\sec^2 -1)\sec u\,du = \int \sec^3 u - \sec u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| - \ln|\sec u + \tan u| + C$$

연습) 적분의 계산을 완료하고 최종 식을 x에 대한 함수로 표현하시오.