Module Root test and Integral test

- Root test
- Integral test

1. Root test

정리. (거듭제곱근 판정법 (Root Test)) 모든 n에 대해 $a_n > 0$이고 극한값

$$r = \lim_{m \to \infty} (a_m)^{\frac{1}{m}}$$

이 존재한다고 가정.

(i) $r < 1$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 수렴한다.

(ii) $r > 1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 발산한다.

(iii) r=1 이면 급수의 수렴발산 여부를 결정할 수 없다.

(IDEA)

0<$r < s < 1$ 가 되는 s를 선택.

극한의 정의에 의해 조건 $n \geq N$ 을 만족하는 임의의 자연수 n에 대하여 부등식

$$(a_n)^{1/n} < s$$

즉

$$a_n < s^n$$

을 만족하게 되는 자연수 N 이 존재한다. 앞서와 마찬가지로 이로부터

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} s^n \leq \frac{1}{1-s}$$

가 성립하고, 이로부터 급수 $\sum a_n$ 이 수렴한다는 것을 금방 얻어낼 수 있다.

$r > 1$ 일 때 $1 < S < r$ 인 S 를 하나 선택하면

극한의 정의에 의해 어떤 큰 자연수 N이 존재해서,

$n \geq N$ 인 모든 자연수 n에 대하여 $(a_n)^{1/n} > S$ => $a_n > S^n$

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} S^n$ => 이 발산한다.

예제 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$의 수렴여부를 결정하라

$\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{10^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{10}}{10} \rightarrow \frac{1}{10}$ <1 => root test에 의해 수렴

(여기서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 이용. $\sqrt[n]{n} = \exp(\frac{\ln n}{n})$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$임을 확인 L'Hospital 정리 이용)

예제

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\ln n}{n})^n$의 수렴여부를 결정하라.

$\sqrt[n]{(\ln n/n)^n} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ <1 as $n \rightarrow \infty$ => root test 에 의해 수렴

예제 $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$ (p=1 인 경우/ p=2인 경우)

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} \rightarrow 1$ ((p=1 인 경우/ p=2인 경우 모두)

p=1 인 경우 발산/ p=2 인 경우 수렴 => root test로는 판정 불가 => 다른 테스트를 사용해야 함.

Remark

Root test와 Ratio test 비교

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ 경우 두 테스트 모두 작동

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\ln n}{n})^n$ 경우 root test가 더 쉽게 판정할 수 있음

다음 예는 Ratio test는 판정을 할 수 없지만 root test는 판정을 할 수 있음을 보여줌

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n : odd \\ \frac{1}{2^n} & n : even \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

비율판정법을 적용하면

n이 홀수인 경우 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n}$

n이 짝수인 경우 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2}$

a_{n+1}/a_n 의 극한값이 존재하지 않는다

root test를 적용하면

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & n : odd \\ \frac{1}{2} & n : even \end{cases}$$ => 1/2로 수렴 => 무한급수는 수렴한다

2. 적분판정법

Improper integrals

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

예제 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \to \infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1$

예제 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = ?$ 수렴 여부를 결정할 수 있다.

$$\left| \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \le \int_1^b \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx \le \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

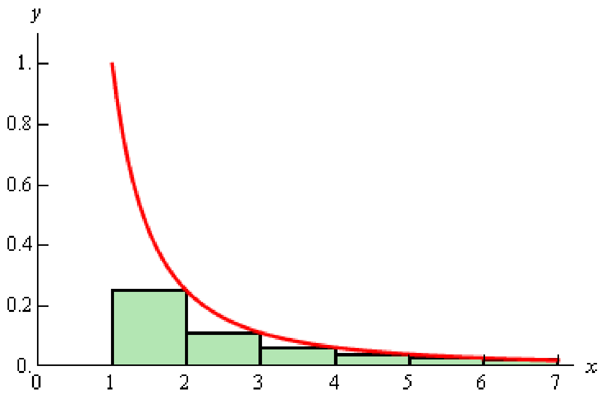
적분판정법의 아이디어

목표: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$ (p-series)의 수렴여부를 결정한다.

(p=2) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

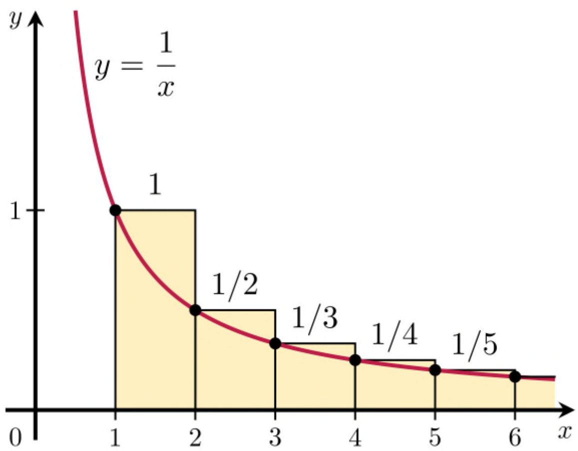
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(1) + f(2) + \cdots$



=> $f(2) + f(3) + \cdots$ = 직사각형들의 면적의 합 < $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ =>유한값

반면에 1+ 1/2+ 1/3 + ...



$f(x) = \frac{1}{x}$ => $f(1) + f(2) + \cdots$ = 직사각형들의 면적의 합 > $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ => 발산

(적분 판정법(Integral Test)) $x>0$ 인 범위의 정의된 단조감수 함수 $f(x)$ 가 조건 $f(x) \geq 0$ 을 만족한다고 가정하자. n 이 임의의 자연수 값을 취할 때 일반항 a_n 이

$$a_n = f(n)$$

으로 주어졌을 경우, 극한

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R f(x)dx$$

가 유한한 값으로 주어지면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고, 만일 극한값

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R f(x)dx$$

이 무한대 ∞ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다.

Remark 적분의 구간이 적당한 자연수 N부터 시작해도 적용 가능 => 무한급수도 N부터 시작하는 경우 생각

예제

임의의 실수 p에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$는 $p \leq 1$ 이면 항상 발산하고, $p>1$인 경우에는 항상 수렴한다.

우선 $p \leq 0$인 경우에는 일반항이 모두 1 보다 크므로 주어진 급수가 무조건 발산함을 알 수 있다. 따라서 $p>0$ 인 경우만 생각하면 충분하다.

함수 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 를 생각해 보자. 이 함수는 적분판정법의 조건을 만족한다 (단조감소이고 양수의 값을 갖는다).

$p \neq 1$인 경우에

$$\int_1^R x^{-p} dx = \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^R = \frac{1}{1-p}(R^{1-p} - 1)$$

를 얻는다.

$p>1$ 인 경우에는 $1-p<0$ 이므로

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-p} dx = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{1-p}(R^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}$$

이 되므로 이 값이 유한하다. 따라서 주어진 급수 $\sum \frac{1}{n^p}$가 수렴

$0<p<1$ 인 경우에는

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-p} dx = \infty$$

이므로 주어진 급수가 발산한다

$p = 1$ 인 경우에는 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 이고 생각해야 할 적분은

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R x^{-1} dx = \lim_{R \to \infty} \ln R = \infty$$

가 된다. 따라서 이 경우에도 주어진 급수는 발산하다.

예제 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \, (p > 1)$ 의 수렴 여부를 결정하라.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^p}$ 는 적분 판정법의 조건을 만족하는가? 단조감소함수인가?

$f'(x) = \dfrac{1 - p\ln \mathrm{x}}{x^{p+1}} < 0 \text{ for } x > \sqrt[p]{e}$

=> $x \geq 3$이면 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^p}$ 는 단조감소이다.

적분판정법을 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$에 적용하면 된다. (n=3부터 시작한다)

$\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$의 수렴 여부를 확인

$\displaystyle\int_3^b \frac{\ln x}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \ln x \Big|_3^b - \frac{1}{1-p} \int_3^b x^{-p} \, dx$ (부분적분 이용)

(t= ln x 의 치환적분도 가능)

Exercise) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ (p>1) 의 수렴 여부를 결정하라.