Module Introduction and ratio test

- Infinite series
- Ratio test

1. 무한급수(Infinite series) (모듈 9와 10 참조)

Motivational Question

매일 $2mg$의 약을 먹는 환자가 있다. 하루가 지난 후 약의 잔류량은 50%이라고 한다. 이 환자의 몸속에 잔류하는 약의 양은 얼마나 될까?

약을 먹기 시작하고 이틀째 $2+2\times\frac{1}{2}$

3일째 $2+\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2}\cdot\ 2)=2+\frac{1}{2}\cdot\ 2+\frac{1}{4}\cdot\ 2=2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$

(1) Infinite series =>sum of infinite sequence of numbers

1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

=> 1+ 1/2+ 1/3 + 1/4 + ...

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$

=> $a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

(2) 부분합 (Partial Sum)

$S_1=a_1\ ,\quad S_2=a_1+a_2\ ,\ \ldots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots\ +a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\quad ,\ \ldots$

무한급수는 부분합의 수열로 이해할 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=L\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}S_n=L$

=> 무한급수가 수렴한다고 부른다.

예제)

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ 은 수렴한다. 왜냐하면

$$S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1$$

(3) 기본질문

- 무한급수는 수렴하는가? (부분합의 수열이 수렴하는가?/ 무한합이 유한한 값인가?) => Convergence test for infinite series (Main Topic)
- 수렴한다면 무한급수의 합은 무엇인가? (일반적으로 어려운 문제 !!)

(4) 일반항 판정법 (n-th term test/divergence test)

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다.

(왜냐하면 만약 S_n -> S => S_n - S_{n-1} ->0 => a_n ->0)

예제 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$는 발산한다. (일반항이 1로 수렴하기 때문에)

Remark. 일반항 판정법의 역은 참이 아니다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이라고 해서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다고 말할 수 없다.

예제 1+ 1/2 + 1/3 + ... 는 발산한다. (일반항 -> 0)

(5) 등비급수(geometric series)

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

(r을 ratio라고 부른다)

$r = 1$ 인 경우는 $S_k = ka$ 로서 발산한다. (a not 0)

$r \neq 1$ 이면 부분합 $S_k = a + ar + \cdots + ar^{k-1} = \frac{a(1-r^k)}{1-r}$ 이다.

($rS_k = ar + \cdots + ar^k$ 를 이용하여 $S_k - rS_k = (1-r)S_k = a - ar^k$ 로부터 얻는다.)

=> $|r| < 1$일 때 $\lim_{k \to \infty} S_k = \frac{a}{1-r}$ 로 수렴하고 $|r| > 1$일 때는 발산한다.

예제)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이며

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$$

Exercise) 처음에 제시했던 문제. 매일 2mg씩 약을 먹는 환자의 궁극적 잔류량?

(6) 비교판정법 (Comparison test)

모든 n에 대해 $0 \leqq a_n \leqq b_n$ 이면

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 발산한다.

예제) 조화급수(harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

이므로 비교판정법에 의해 조화급수는 발산한다.

Remark 14세기 프랑스의 신학자 니콜 오렘이 처음으로 연구

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$를 조화수(harmonic number)라고 부른다.

수학자 Euler는 $\lim_{n\to\infty} H_n - \ln n = \gamma$라는 것을 보였다.

여기서 γ는 오일러-마스케로니 상수 대략 0.57721정도임.

연습문제

1. 비교판정법을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$의 수렴 여부를 결정하라.

2. 비교판정법을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$가 수렴함을 보여라.

(힌트: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, n \geq 2$)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$ 이 수렴함을 비교판정법을 이용하여 보이라.

(hint: $n \geq 1$일 때 $\log n < n$ 임을 보여라 (미분을 이용하여 최대값 조사))

----

2. 비율판정법 (Ratio test)

(1) Motivational question

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ 는 수렴하는가?

(b) $\frac{1}{10} + \frac{2^{10}}{10^2} + \frac{3^{10}}{10^3} + \cdots$ 는 수렴하는가?

(2) 비율 판정법(ratio test)

모든 n에 대해 $a_n > 0$이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에 대하여, 극한값

$$r = \lim_{m \to \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

이 존재한다고 가정하자. (r>0 이거나 r=0)

(i) $r < 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 수렴

(ii) $r > 1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 발산

(iii) $r = 1$이면 결정할 수 없다. (=> 다른 테스트를 사용해야 함)

관찰) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ => $\frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = \frac{1}{2} < 1$ (수렴하는 geometric series)

관찰) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ => ratio =2 >1 (발산하는 geometric series)

관찰) 1+1/2 + 1/3 + ... => $\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=1$ 반면에 주어진 무한급수는 발산

관찰) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ => $\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=1$ 반면에 주어진 무한급수는 수렴

(Test가 작동하는 이유)

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\approx r \text{ for } n\geq N$ (N: 아주 큰 자연수)

=> $a_{N+1}\approx ra_N,\ a_{N+2}\approx ra_{N+1}\approx r^2a_N,\ a_{N+3}\approx ra_{N+2}\approx r^3a_N$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}a_n=a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots\approx a_N+ra_N+r^2a_N+\cdots$$

$$\approx a_N(1+r+r^2+\cdots)$$

=> r<1 이면 수렴, r>1 이면 발산

예제) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 이 수렴하는 지 조사하여라.

=> $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$ <1이므로 주어진 급수는 비율판정법에 의해 수렴한다.

예제) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ =1/1 + 2^2 /(2 times 1) + 3^3 /(3 times 2times 1) + ...이 수렴하는지 조사하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$ 이므로 주어진 급수는 비율

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.7>1$$

비율 판정법에 의해 발산함을 알 수 있다.