Module Absolute convergence and Leibniz test

- 절대수렴
- 교대급수와 라이프니츠 판정법

1. 절대수렴

Example $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$는 수렴하는가 발산하는가?

0< 1, 2, 3 < π => $\sin n > 0$ for n=1, 2, 3

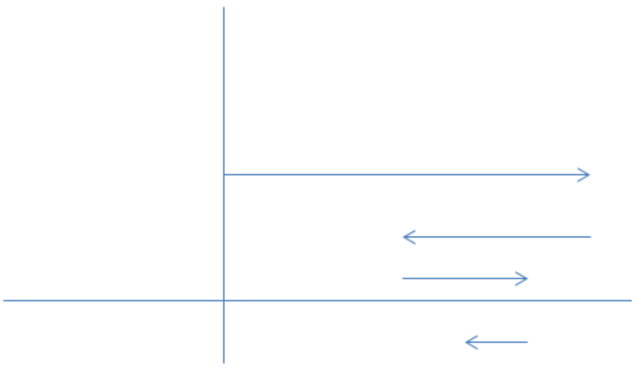
$\pi < 4, 5, 6 < 2\pi$ => $\sin n < 0$ for n=4, 5, 6

양의 항과 음의 항이 섞여 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 는 모든 항이 양수이므로 앞에서 다룬 판정법을 사용할 수 있다.

이 급수가 수렴한다고 해서 본래의 급수가 수렴한다고 말할 수 있는가?

예제) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 와 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$



$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 는 수렴하지 않지만 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 수렴할 가능성이 있다.

(절대 수렴이라는 개념을 생각하는 이유) 암시하는 바는 원래 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (여기서 일반항은 양수 음수가 섞여 있다)보다 더 수렴하기 힘든 상황 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴한다면 원래의 급수도 수렴할 것이다.

정의. 임의의 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 주어졌을 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 가 수렴하면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 절대수렴한다 (converges absolutely) 고 한다.

(절대수렴 판정법) 절대수렴하는 급수는 수렴한다.

예제) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$는 절대수렴한다. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$가 수렴하기 때문에). 따라서 주어진 급수도 수렴한다.

예제) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$는 절대수렴한다. 왜냐하면

$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (비교판정법에 의해 왼쪽의 급수는 수렴) (비교판정법은 일반항이 모두 양수인 경우에만 적용)

절대수렴 판정법에 의해 본래 주어진 급수는 수렴한다.

----

2. 교대급수와 라이프니츠 판정법

(절대수렴판정법의 IDEA)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 주어졌을 때

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n \, (a_n > 0\text{인 경우}) \\ 0 \;\; (a_n \le \; 0\text{인 경우}) \end{cases}$$

로 두고

$$a_n^- = a_n^+ - a_n$$

(=> a_n <0 => a_n^- = -|a_n|)

로 두기로 하자. 그러면 a_n^+와 a_n^-는 모두 0 과 같거나 0 보다 크고, 관계식

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

를 만족

$$0 \le a_n^+ \le |a_n| \quad \text{와} \quad 0 \le a_n^- \le |a_n|$$

이 항상 성립하며, $\sum |a_n|$ 이 수렴하면

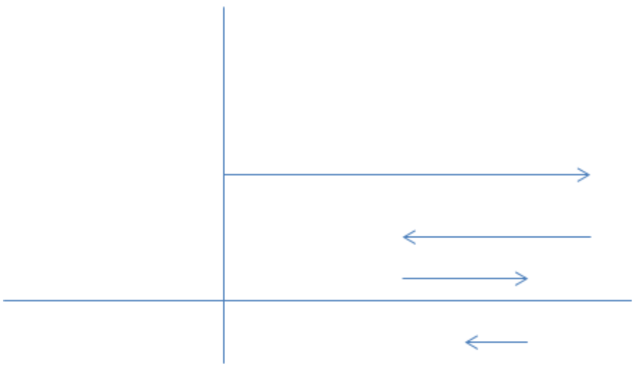
=> 비교판정법에 의하여 급수 $\sum a_n^+$와 $\sum a_n^-$가 각각 수렴

=> $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ 도 수렴한다. (부분합을 비교)

예제 (절대수렴판정법이 작동하지 않는 경우)

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 는 절대수렴하지 않는다. 왜냐하면 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ 가 발산하기 때문이다.

그러면 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 는 수렴하지 않는가? 아직 알 수 없다.



=> 수렴하는 것 같이 보인다. 정당화할 수 있는가?

정의: 무한급수의 각 항의 부호가 그 다음 항의 부호와 다르면 그 급수를 교대급수 (alternating series)라고 부른다. 즉, 모든 n에 대하여 $a_n > 0$ 일 때 $\sum (-1)^{n+1} a_n$ 꼴의 급수이다.

(즉 양수와 음수가 교대로 등장해야 한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$는 교대급수가 아니다.)

(교대급수 판정법/Leibniz test). 모든 n에 대하여 $a_n > 0$ 이고, $a_n \ge a_{n+1}$ (단조감소 decreasing)이며 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ 이면 교대급수 $\sum (-1)^{n+1} a_n$는 수렴한다.

(IDEA)

$s_n = a_1 - a_2 + \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n+1} a_n$ 부분합

=>

$$a_1 \geq a_1 - (a_2 - a_3) \geq a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \geq \cdot \cdot \cdot$$

이므로 $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdot \cdot \cdot$ 이 된다. 한편

$a_1 - a_2 \leq a_1 - a_2 + (a_3 - a_4) \leq a_1 - a_2 + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \leq \cdot \cdot \cdot$

이므로 $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdot \cdot \cdot$ 을 얻는다. 임의의 자연수 n에 대하여

$$s_1 \geq s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$$

이므로 수열 $\{s_{2n-1}\}$과 $\{s_{2n}\}$이 모두 유계인 단조수열이어서 수렴한다.

--------X--X---X-------O---O--O------------------->

s_2 s_4 s_6 s_5 s_3 s_1

(Lower bound가 있는 decreasing sequence는 수렴한다.

Upper bound가 있는 increasing sequence는 수렴한다.

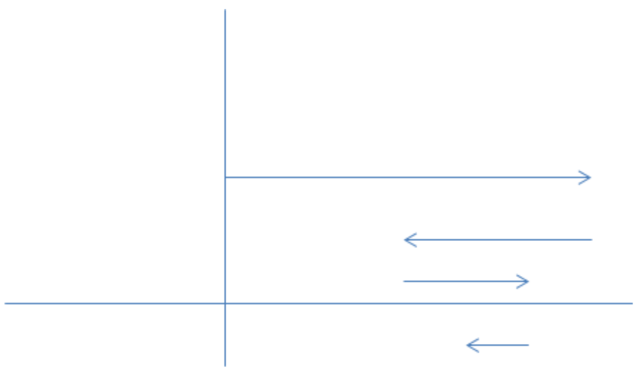
(Bolzano-Weierstrass 정리)

두 극한은 일치한다. 왜냐하면

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n-1} - \lim_{n \to \infty} s_{2n} = \lim_{n \to \infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n \to \infty} a_{2n} = 0$$

=> 부분합 수열 $\{s_n\}$이 수렴한다.

=> 급수는 수렴



예제) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

교대급수판정법의 조건 확인

(i) 교대급수이다

(ii) 일반항이 단조감소이다. 1/2> 1/3 > 1/4 >... ($\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$)

(iii) 일반항 ->0 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

=> 주어진 급수는 수렴한다.

주의) 일반항이 0으로 수렴한다고 해서 일반항이 단조 감소한다고 말할 수 없다.

예제) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\cdots$ 는 교대급수판정법을 적용할 수 있는가?

일반항은 0으로 수렴하지만 단조 감소하지 않는다.

$a_4=\frac{1}{3^2}<a_5=\frac{1}{2^3}$

예제) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n, \quad b_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n:odd \\ \frac{1}{n^2}, & n:even\end{cases}$

교대급수판정법을 적용할 수 있는가?

일반항은 0으로 수렴하지만, b_n은 단조감소하지 않는다.

$1/b_n$: 4, 3, 16, 5, 36, 7, 64, 9, ... 단조 증가하지 않는다.

교대급수판정법을 적용할 수 없다.

이 급수는 발산한다. (부분합이 발산하기 때문에)

**교대급수판정법을 적용할 때 세 가지 조건을 모두 확인해야 한다.

예제) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$는 수렴여부를 결정하라.

교대급수판정법을 적용해보자.

(i) 교대급수이다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$ (확인해볼 것)

(iii) $\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ for all n>N (N: 어떤 큰 자연수) ?

(iii)을 확인하는 두 가지 방법

첫 번째 : 부등식을 직접 증명하기

$n(n+2)^2 > (n+1)^3$?

$n(n+2)^2-(n+1)^3 = n^2+n-1 = (n+1/2)^2-3/4 \geq 0$ for $n+1/2 \geq \sqrt{3}/2$

=>

$n > \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.7/2$

=> $\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ for $n \geq 1$

두 번째 방법 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$이 $x > x_0 > 0$에서 감소함수임을 보인다.

$f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \leq 0$ for $x \geq 1$

$f(x)$는 x>1에서 감소함수 => f(n) > f(n+1)

Next time: Power series (=> Taylor series) (멱급수=> 다항급수?) 수렴성