Module Hyperbolic functions

1. 쌍곡함수 (Hyperbolic function)

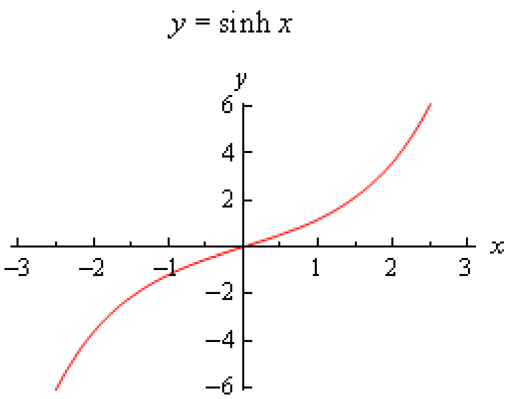
(정의)

(1) 쌍곡사인함수(hyperbolic sine) $\sinh u \;=\; \dfrac{e^{u}-e^{-u}}{2}$

정의구역 : 실수전체, 치역 (Range) : 실수 전체

홀함수 (odd function), 단조증가함수

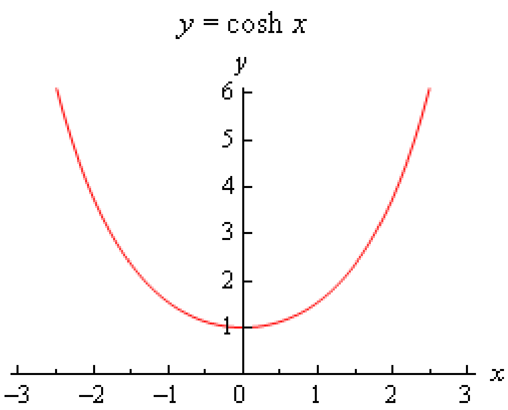
$\lim_{u \to +\infty} sinhu = +\infty$



(2) 쌍곡코사인함수(hyperbolic cosine) $\cosh u \;=\; \dfrac{e^{u}+e^{-u}}{2}$

정의구역: 실수전체, 치역: 1과 같거나 큰 실수들의 집합

짝함수 (even function)



쌍곡함수를 $x=\cosh u$ 와 $y=\sinh u$로 두면

$$x^2-y^2 \;=\; \cosh^2 u-\sinh^2 u \;=\; \frac{1}{4}(e^{2u}+2+e^{-2u})-\frac{1}{4}(e^{2u}-2+e^{-2u}) \;=\; 1$$

=> 쌍곡선에 대한 적절한 매개화(parametrization)를 제공

=> 쌍곡함수라는 이름의 유래

● **삼각함수와의 유사성**

cosine function => even function <= hyperbolic cosine

sine function => odd function <= hyperbolic function

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 원에 대한 매개화

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ 쌍곡선에 대한 매개화

삼각함수와 유사하게 정의를 진행

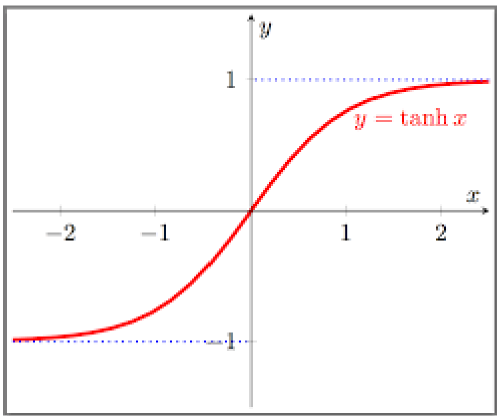
쌍곡탄젠트함수(hyperbolic tangent) $\tanh u = \dfrac{\sinh u}{\cosh u} = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

쌍곡코시컨트함수(hyperbolic cosecant) $\operatorname{csch} u = = \dfrac{1}{\sinh u} = \dfrac{2}{e^u - e^{-u}}$

쌍곡시컨트함수(hyperbolic secant) $\operatorname{sech} u = \dfrac{1}{\cosh u} = \dfrac{2}{e^u + e^{-u}}$

쌍곡코탄젠트함수(hyperbolic cotangent) $\coth u = \dfrac{\cosh u}{\sinh u}$

$y = \tanh x$의 그래프



=> Range = (-1, 1)

2. Identities

(1) Addition formula

$$\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$$

(공식 유도: $\sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y})$$

$$= \frac{2}{4}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y)$$

연습) hyperbolic cosine에 대한 addition formula 확인

(2) Double angle formula

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

(3) Half angle formula

$$\sinh^2 u = \frac{\cosh 2u - 1}{2}$$

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2}$$

3. 쌍곡함수의 미분과 적분

(1) $\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

(2) $\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

(3) $\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh x\cosh x - \sinh x\sinh x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

(4) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

(5) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

(6) $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$

4. 쌍곡함수의 응용

보기: $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ 을 계산하여라.

삼각함수를 이용한 치환처럼 적당한 일대일 대응함수 $x=f(u)$를 선택해서 어떤 함수 g에 대해 $1+f(u)^2=g(u)^2$가 성립하면 치환이 성공한다.

$x=\sinh u$로 치환하면 $x^2+1=\sinh^2 u+1=\cosh^2 u$

이 때 $dx=\cosh u\,du$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx=\int \sqrt{\cosh^2 u}\,cosh u\,du=\int |\cosh u| \cosh u\,du$$

$$=\int \cosh^2 u\,du=\int \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)du$$

(Q: 여기서 왜 $|\cosh u|=\cosh u$ 일까요?)

(삼각함수의 power의 적분과 유사한 상황. 삼각함수의 경우 어떻게 해결했나요?)

$$=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sinh 2u+C=(1/2)\sinh^{-1}x+(1/2)x\sqrt{x^2+1}+C\,.$$

($\cosh(2u)=\cosh^2(u)+\sinh^2(u)=2\cosh^2(u)-1$, => Half-angle formula

$\sinh(2u)\ =\ 2\sinh(u)\cosh(u)$ Double angle formula 이용)

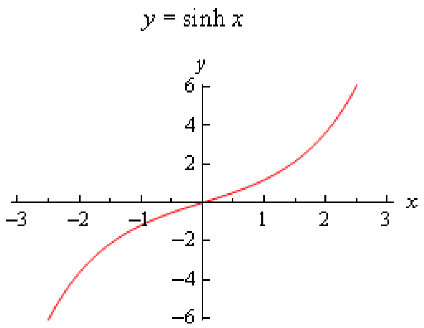
Q: $\sinh^{-1}u$는 정의하는 데 문제가 없는가?

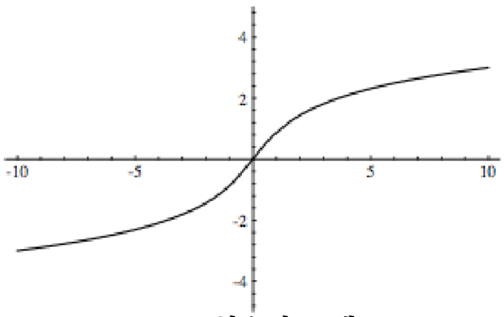
=> $x=\sinh u$는 일대일 대응 함수 (one to one function)

=> 역함수 (Inverse function)을 정의하는 것이 가능하다.

5. 쌍곡함수의 역함수

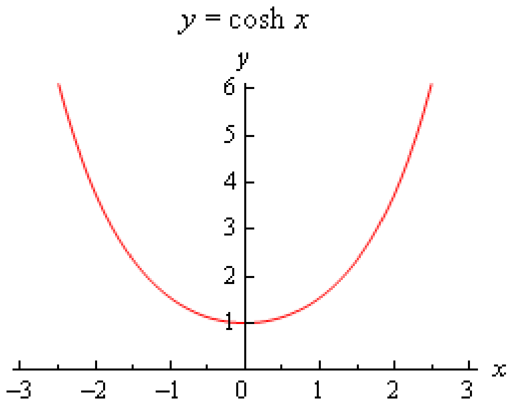
(1) 먼저 $y=\sinh x$ 의 역함수를 생각하여 보자. 이는 일대일 대응 함수이므로 역함수를 갖는다 그 역함수를 $y=\sinh^{-1}x$로 표시한다.



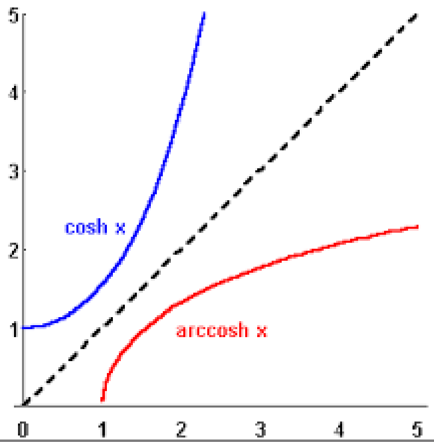


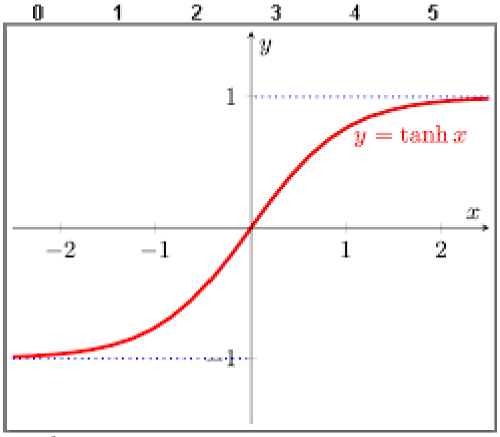
inverse hyperbolic sine함수의 그래프

(2) $y = \cosh x$ 의 경우는 정의역을 $x \geq 0$ 로 제한하면 치역이 $\{y : y \geq 1\}$이 되고 역함수를 갖는다. 이를 $y = \cosh^{-1} x$ 로 표기한다.



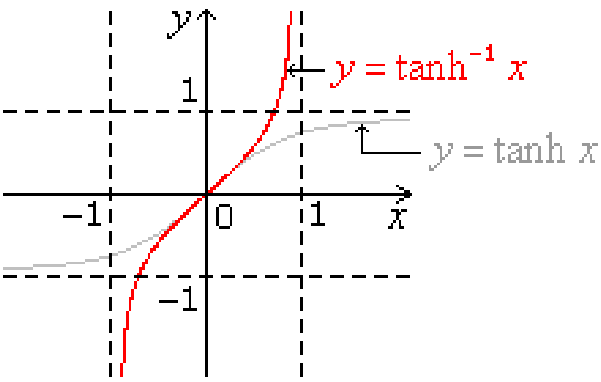
(3) hyperbolic tangent 함수의 역함수





($\frac{d}{dx}tanhx = \mathrm{sech}^2 x > 0$ => 단조증가함수, 일대일 대응함수)

치역 = (-1, 1) => $y = \tanh^{-1}x$의 정의구역은 (-1, 1)



★ 이들 역함수들은 로그함수로 나타낼 수 있다.

(a) $\sinh^{-1}x \; = \; \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(b) $\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(c) $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$

(a) 경우 => $y = \sinh^{-1}x$ 에서

$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$

$e^y - e^{-y} = 2x$

$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ (t^2 - 2x t -1 =0 if we set t=e^2y)

$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

이때 e^y 가 양수이므로 $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ 이 되고 따라서 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$이다.

(b) 경우 =>

$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \quad \Rightarrow \quad e^y + e^{-y} = 2x$

$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1} \ (x \geq 1)$

$y \geq 0 \ \Rightarrow \ e^y \geq 1 \ \Rightarrow \ e^y = x + \sqrt{x^2-1} \geq 1 \ (x \geq 1)$ 따라서 위의 식을 얻는다.

$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \leq 1 \ (\text{if } x \geq 1)$ =>이 경우는 제외가 된다.

(c) 의 경우 $-1 < \tanh y < 1 \ \Rightarrow \ |x| < 1$ 이다. $\tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$ 에서 분모분자에

e^y 를 곱하여 $\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$ 을 얻는다. 이로부터

$e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \ \Rightarrow \ (1-x)e^{2y} = x+1 \ \Rightarrow \ e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right) \quad (\ |x| < 1 \ )$

을 얻는다.

6. 쌍곡함수의 응용 1

(1) hyperbolic function을 이용한 치환 적분

예제) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$ $(u>1)$ 을 계산하여라.

풀이. $u^2-1=\cosh^2-1=\sinh^2 x$ 에 착안

$u=\cosh x$, $du=\sinh x\, dx$로 치환하면

(여기서 hyperbolic cosine이 일대일 대응 함수가 되도록 하기 위해 $x>0$를 정의구역으로 선택)

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{\sinh x\, dx}{|\sinh x|} = x + C = \cosh^{-1} u + C = \ln(u+\sqrt{u^2-1}) + C$$

(여기서 $\sinh x>0,\ \text{if } x>0$)

예제) 스카이 다이버가 비행기에서 뛰어내렸다. 조금 후 낙하산을 폈는데 공기저항을 받게 되었다. 다이버의 속도 v를 알 수 있는가?

다이버의 질량을 m, 중력 가속도를 g라고 하면 뉴턴의 운동방정식 =>

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$$

공기 저항은 속도의 제곱에 비례한다는 것이 알려져 있다. 비례상수 k를 사용.

$$\int \frac{1}{mg-kv^2}dv = \int \frac{1}{m}dt$$

좌변= $\frac{1}{k}\int \frac{1}{mg/k-v^2}dv$

$\int \frac{1}{a^2-v^2}dv$ $v=a\tanh u$로 치환

$(\cosh^2 u-\sinh^2 u=1 \quad => \quad 1-\tanh^2 u=\operatorname{sech}^2 u)$

$\frac{dv}{du}=a\operatorname{sech}^2 u$

$$\int \frac{1}{a^2(1-\tanh^2 u)} a\operatorname{sech}^2 u\, du = \frac{1}{a}\int 1 du = u/a + C = \frac{1}{a}tanh^{-1}(v/a)+C$$

$a=\sqrt{mg/k}$,

=> $\tanh^{-1}(v/a)=(ak/m)t+C$

v(0)=0 => C=0

$v/a = \tanh(\sqrt{gk/m}\,t)$

$v(t) = \sqrt{mg/k}\,\tanh(\sqrt{gk/m}\,t)$

t가 무한대로 갈 때 hyperbolic tangent -> 1

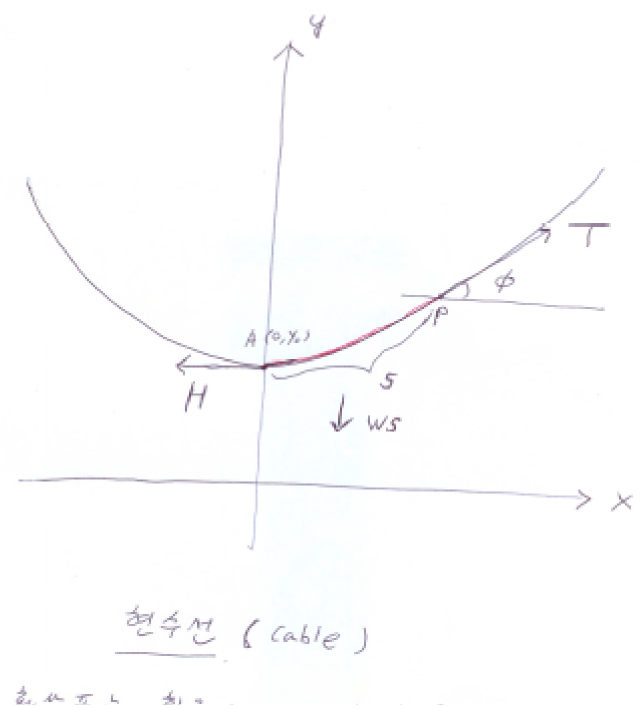
따라서 스카이 다이버의 속도는 $\sqrt{mg/k}$에 수렴한다.

7. 쌍곡함수의 응용 2

Hanging cable: A graph of hyperbolic cosine

현수선은 어떤 함수의 그래프일까?

Catenary (현수선)- 갈릴레이가 처음으로 질문



세 가지 힘이 케이블 조각 s를 지탱한다.

1. H: horizontal tension at A
2. T: tangential tension at P
3. Downward force exerted on the cable section by gravity

단위 길이당 케이블의 무게를 w라고 하자

$$Tcos\phi = H \text{ (x축 방향의 힘의 평형)}$$

$$Tsin\phi = ws \text{ (y축 방향의 힘의 평형)}$$

케이블의 기울기는 다음 식으로 주어진다

$$\frac{dy}{dx} = \tan\phi = \frac{ws}{H} \qquad (1)$$

케이블의 길이를 나타내는 변수 s의 x에 대한 미분을 구해보자.

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ => $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ => $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

식 (1)의 우변에 대입하면

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \qquad (2)$$

위와 같은 식을 미분방정식이라고 한다. 현수선은 미분방정식 (2)를 만족하는 어떤 함수 y=(x)이다. 그림으로부터 미분방정식 (2)가 다음의 초기 조건을 만족함을 알 수 있다.

$\frac{dy}{dx}(0)=0 \qquad y(0)=y_0$

미분방정식을 풀기 위해 $a=\frac{w}{H}$ 라고 놓고, $\frac{dy}{dx}=p$ 라고 놓자. 그러면 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ 이므로 미분방정식 (2)는 다음과 같다

$$\frac{dp}{dx}=a\sqrt{1+p^2}\,. \qquad (3)$$

p에 관한 함수는 좌변에 x에 관한 함수는 오른쪽으로 모으면

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=a\,dx$$

양변을 적분하면 다음과 같다.

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\int a\,dx=ax+C \qquad (4)$$

좌변의 적분을 구해보자. 치환적분을 사용한다. $p=\sinh u$ 라고 놓으면 $dp=\cosh u\,du$ 이고 $1+p^2=\cosh^2 u$ 을 만족한다. 따라서

$$\int\frac{\cosh u\,du}{\sqrt{\cosh^2 u}}=\int du=u+C'=\sinh^{-1}p+C'$$

식 (4)는

$$\sinh^{-1}p=ax+C$$

초기 조건을 이용하면 dy/dx (0)=$p(o)=0$, 이므로

$$\sinh^{-1}p(0)=C \quad => \quad \sinh^{-1}0=C=0$$

$$p=\sinh ax \text{ 즉 } \frac{dy}{dx}=\sinh ax$$

을 얻는다. 이식을 만족하는 y=y(x)는

$$y=\frac{1}{a}\cosh ax+C'$$

초기 조건을 이용하면 $y(0)=y_0=\frac{1}{a}+C$. 따라서

$$y=\frac{\cosh ax}{a}+y_0-\frac{1}{a}$$

$y_0=\frac{1}{a}$가 되도록 초기 조건을 조정하면

$$y=\frac{\cosh ax}{a}=(H/w)\ \cosh\frac{w}{H}x$$