Module Determinant: Basics and application

1. Module 행렬

행렬(Matrix)은 숫자나 기호를 아래와 같이 직사각형 모양으로 배열한 것으로서 행(row)의 개수 m과 열(column)의 개수 n 으로 행렬의 크기를 $m\times n$ 으로 나타낸다. a_{ij} 를 $(i,\ j)$항이라고 하고 아래의 행렬을 (a_{ij})로 표현하기도 한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 를 i번째 행 벡터, $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$ 를 j번째 열 벡터라고 한다.

$1\times n$ 행렬을 행벡터(row vector),
$m\times 1$ 행렬을 열벡터(column vector) 라고도 한다.

보기. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2×4 행렬

3×1 행렬
열벡터

행렬의 예

암환자들의 유전 정보 행렬 (Clustering method로 분석)

환자명/유전코드	Block1	Block2	Block3	Block4
A	0.9	0.1	0.5	0.3
B	0.7	0.2	0.6	0.4
C	0.6	0.1	0.2	0.5
D	0.6	0.3	0.7	0.6

행렬의 연산

행렬의 더하기는 행렬의 크기가 같을 때 각 항끼리 더하는 것으로 정의한다.

$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

행렬의 스칼라곱은 스칼라를 모든 항에 곱한다.

$c(a_{ij}) = (ca_{ij})$

보기 1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$, $2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

두 행렬의 곱

앞의 행렬의 열의 개수와 뒤에 곱하는 행렬의 행의 개수가 같을 때 다음과 같이 정의한다: $A = (a_{ij})$ $m \times n$ 행렬, $B = (b_{jk})$ $n \times l$ 행렬 일 때 두 행렬의 곱 AB는 $m \times l$ 행렬로서 $AB = (c_{ik})$로 두면 $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ 로서 A 의 i 번째 “행벡터”와 B의 k 번째 “열벡터”의 “내적”으로 볼 수 있다.

보기 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 & (-1)\cdot(-3) + 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 & (-2)\cdot(-3) + 0\cdot(-2) + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1+3 & 3-1 \\ -2+6 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

보기 연립방정식 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 을 행렬을 써서 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.

연습 1. 들어가기에서 제시한 다음 연립방정식을 위의 보기와 같이 행렬의 곱으로 나타내어라

$4x - z = 0$

$x + y + z = 1$

$y - z = -1$

행렬의 곱하는 순서를 바꾸면 항상 값이 같지는 않다.

연습 2. $AB \neq BA$ 인 보기를 들어 보아라.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

행렬의 곱과 더하기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) (결합법칙) 행렬 A, B, C 에 대하여 곱 AB, BC 가 정의될 때, $(AB)C = A(BC)$ 이다.

(2) (배분법칙) A, A'이 $m \times n$ 행렬이고, B, B'이 $n \times l$ 행렬일 때, 실수 k 에 대하여 $(A + A')B = AB + A'B$ $\quad A(B + B') = AB + AB'$ $\quad (kA)B = k(AB) = A(kB)$ 이다.

정의. $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$의 행과 열을 바꾸어 놓은 것을 A의 전치행렬(transpose matrix)이라고 부르고, A^t 혹은 A^T로 쓴다. 즉, A^t는 $n \times m$ 행렬로서 $A^t = (b_{ij})$라고 하면 $b_{ij} = a_{ji}$ 이다.

보기 $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1\,4 \\ 2\,5 \\ 3\,6 \end{pmatrix}$, $\qquad (a_1 \cdots\ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t$ 이다.

정의. 행의 수와 열의 수가 같은 행렬을 정방행렬(square matrix)이라고 부른다. 또, 대각선(diagonal)의 항들, 즉, (i,i) 항들이 모두 1이고 나머지 항이 0으로 주어진 단위(또는 항등)행렬(identity matrix)이라고 부르고, I_n 또는 I 로 나타낸다.

보기 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$는 항등행렬이다.

연습 $m \times n$ 행렬 A에 대하여 $AI_n = A = I_m A$ 임을 보여라.

----

2. 행렬식(determinant)

Question) 정방행렬 A에 대해 AB=BA=I 가 되는 B를 어떻게 구하는가?

이 질문은 왜 중요한가?

연립방정식 $2x+3y=1$ => $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$3x+5y=1$

=> B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 BA =I가 되는 행렬이라 하자.

B를 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 양변에 곱하면 B(A $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) = (BA)$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = B $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (좌변은 결합법칙 적용)

=> I $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Note) 정방행렬 A에 대해서 $BA=AB=I$ 가 되는 행렬 B를 행렬 A의 역행렬이라고 한다. 곱하기에 대한 역원(Inverse)이다.
모든 정방행렬이 역행렬을 갖는 것은 아니다.
역행렬을 가질 조건은 ? (모든 연립방정식이 항상 유일한 해를 갖는가?)

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 대해 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$는 A의 역행렬이 된다.
ad-bc=0이면 역행렬이 정의가 안된다.
=> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$는 ad-bc =2-2=0이므로 역행렬을 정의할 수 없다.

=> ad-bc의 역할이 중요 이를 행렬 A (2 by 2) 의 행렬식이라고 한다.

일반차원의 정방행렬의 행렬식(determinant) 정의하기

차원에 대한 reduction으로 정의함
det: A -> R

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$일 때, A의 행렬식은

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 이면 , A의 행렬식은

$$\det A = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}$$

$$= (-1)^2 a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^3 a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^4 a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

여기서 A_{ij} 는 행렬 A에서 i-번째 행과 j-번째 열을 뺀 나머지로 이루어진 행렬을 의미한다. $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ 를 A의 (i,j)-cofactor 라고 한다.

=> 첫 번째 행을 따라 행렬식을 전개함.

이 행렬식의 값은 다른 행을 기준으로 전개하여도 같은 값을 얻게 됨을 볼 수 있다.

$$\det A = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} \quad , \quad i \in \{1,2,\dots,k+1\}$$

i번째 행을 따라 전개

또한, 어느 한 열을 기준으로 전개하여도 같은 값을 얻게 된다.

$$\det A = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} \quad , \quad j \in \{1,2,\dots,k+1\}$$

j번째 열을 따라 전개

Example

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때 $\det A$ 를 구하여라.

풀이1. 첫 번째 행을 기준으로 전개하면

$$\det A = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

풀이2. 두 번째 행을 기준으로 전개하면

$$\det A = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j}$$
$$= -0\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix} = 3-(-2) = 5$$

풀이3. 첫 번째 열을 기준으로 전개하면

$$\det A = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1}$$
$$= 1\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = 5$$

보기. $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\1 & 2 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ 일 때 $\det A$ 를 구하여라.

풀이. 첫 번째 열을 기준으로 전개하면 (0이 가장 많은 행 또는 열을 선택)

$$\det A = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1}$$

$$= 0\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 4\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}-1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}$$

$$= -(-4-3) = 7$$

행렬식의 성질을 묘사할 때 다음 기호를 사용하면 편리하다. 행렬 A의 각 열을 다음과 같이 표시하면

$a^1 = \begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix}, \ldots, a^n = \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{nn}\end{pmatrix}$ (A의 열벡터들)

$A = (a_{ij}) = (a^1, \ldots, a^n)$로 나타낼 수 있다.

=> 행렬식은 $R^n \times R^n \times \cdots \times R^n$ 의 원소 $(a^1, \ldots, a^n)$에 실수 $\det(a^1, \ldots, a^n) = \det A$ 를 대응시키는 함수로 볼 수 있다.

*행렬식은 다음과 같은 특별한 성질을 가짐

“열” 대신 “행”을 넣어도 아래의 모든 성질이 그대로 성립한다.

1) 각 열에 대해 선형이다: 즉, 다음 두 가지 성질이 있다. 스칼라 $k \in R$ 에 대해 $\det(a^1,\dots,a^{i-1},ka^i,a^{i+1},\dots a^n) = k\det(a^1,\dots,a^{i-1},a^i,a^{i+1},\dots a^n)$ 이고 하나의 열벡터 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 를 한 열에 더하면 행렬식의 값은 다음과 같다.

$$\det(a^1,\dots,a^{i-1},a^i+b,a^{i+1},\dots a^n)$$
$$= \det(a^1,\dots,a^{i-1},a^i,a^{i+1},\dots a^n) + \det(a^1,\dots,a^{i-1},b,a^{i+1},\dots a^n)$$

(EX) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-3)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (1-3) = -2$

2) 두 열을 교환하면 행렬식은 (-1)을 곱한 만큼 차이가 난다. 따라서 두 열이 같으면 행렬식은 0이 된다: $\det(a^1,\dots,a^i,\dots,a^j,\dots a^n) = -\det(a^1,\dots,a^j,\dots,a^i,\dots a^n)$

Ex) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

3) 한 열에 상수를 곱한 것을 다른 열에 더하여 얻은 행렬의 행렬식은 처음 행렬의 행렬식과 같다:

$$\det(a^1,\dots,a^{i-1},a^i+ka^j,a^{i+1},\dots a^n) = \det(a^1,\dots,a^{i-1},a^i,a^{i+1},\dots a^n)$$

Ex) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 3 \\ 3-2 & 2 & 1 \\ 1-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4) 항등행렬의 행렬식은 1이다.

(*5) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Implication: $AB = I$ => det (AB) = det(A) det(B) = det(I) =1 => det (A) is not zero

=> A가 역행렬을 가질 필요조건은 det(A)가 0이 아닌 것.

(역도 참이다. 즉 행렬식이 0이 아니면 역행렬을 가진다 => 역행렬의 공식 얻을 수 있

다)

6) $\det A = \det A^t$

보기 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 의 행렬식의 값은, 첫 번째 행과 세 번째 행이 같으므로 위의 성질 2)에 의해 계산하지 않아도 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 임을 알 수 있다.

(det A = - det A => 2 det A =0)

보기 위 성질 3)에 의하여 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 임을 계산하지 않고도 알 수 있다. 왜냐하면 우변의 행렬은 좌변의 행렬의 첫 번째 행을 두 번째 행에 더해서 얻은 것이기 때문이다.

보기 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대해 $\det A^5$ 를 구하여라.

풀이. $\det(A^5) = (\det A)^5 = 5^5$

행렬식이 중요한 이유는 역행렬의 존재 여부를 판정하게 해줌 => 연립방정식을 푸는데 핵심.

해가 유일한가 아닌가를 알려줌

연립방정식 $2x + 3y = 1$ => $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$3x + 5y = 1$

해가 유일한가? det A = 10 -9 =1 not zero => 역행렬 존재 => 해가 유일

● 벡터의 외적 (다음 시간) (행렬식이 중요한 역할 !!)

● 행렬식에 대해 자세한 것은 <선형대수학>에서 다룸