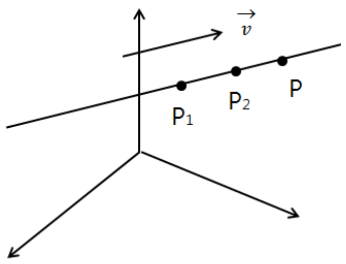
Module Curves in space

1. Vector Equation for a line and plane

(1) 직선의 방정식



$$\overrightarrow{P_1P_2} // \overrightarrow{P_1P}$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Set $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$\overrightarrow{P_1P} = t\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = t\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{v}$$

Ex) Line passing through $P_1(-3,2,-3)$, $P_2(1,-1,4)$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1+3, -1-2, 4+3) = (4,-3,7)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{v}$$

$$(x,y,z) = (-3,2,-3) + t(4,-3,7)$$

$$x = -3+4t$$
$$y = 2-3t \qquad (t \in R)$$
$$z = -3+7t$$

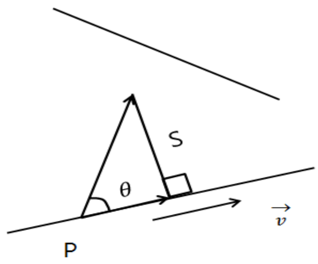
=> 직선의 매개변수 방정식

$P = (a,b,c)$를 지나고 벡터 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$와 평행한 직선

직선 위의 임의의 점 (x,y, z) => $(x,y,z) - (a,b,c) = t(v_1, v_2, v_3)$

$$(x,y,z) = (a,b,c) + t(v_1, v_2, v_3)$$

(2) 한 점에서 직선까지의 거리



L: Line Passing through P paralleled to $\vec{v}$

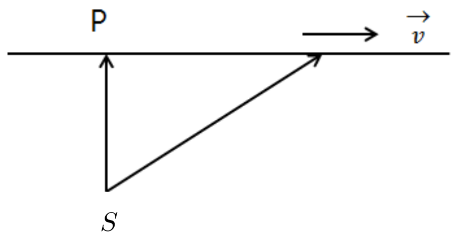
직선 밖의 점 S에서 직선 L까지의 거리

$$\text{Distance} = |\overrightarrow{PS}|\sin\theta$$

$$|\overrightarrow{PS}\times\vec{v}| = |\overrightarrow{PS}||\vec{v}|\sin\theta$$

$$\text{Distance} = |\overrightarrow{PS}|\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{PS}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

예제) $L: \ x = 1+t, \quad y = 3-t, \quad z = 2t$ 점 $S(1,1,5)$에서 직선 L까지 거리



$(1,3,0)+t(1,-1,2)$ =>P=(1, 3, 0) 직선 위의 점, $\vec{v}=(1,-1,2)$ 직선의 방향 벡터

$$\overrightarrow{PS} = (1,1,5)-(1,3,0) = (0,-2,5)$$

$$\overrightarrow{PS}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

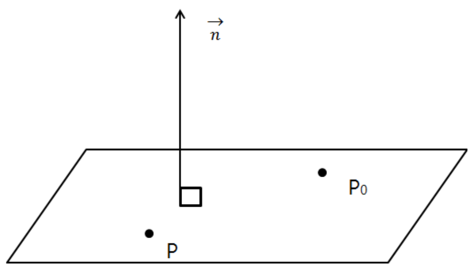
$$= (-4+5)\vec{i} - (-5)\vec{j} + (0+2)\vec{k}$$

$$= 11+5\vec{j}+2\vec{k}$$

$$Distance = \frac{|\overrightarrow{PS}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

(3) 평면의 방정식

Plane through $P_0(x_0, y_0, z_0)$ normal to $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$



$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$P(x, y, z)$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$$

vector $\vec{n}$ 을 평면의 normal vector (法線벡터)라고 부른다.

Ex) $P_0(-3, 0, 7)$ $\vec{n} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ P_0를 지나고 normal vector가 $\vec{n}$인 평면의 방정식

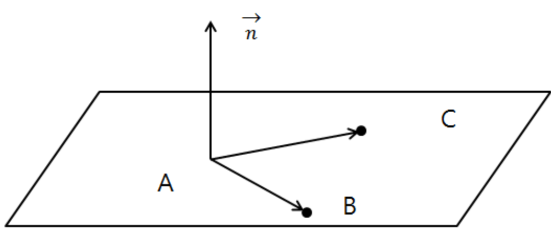
$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$(x + 3, y, z - 7) \cdot (5, 2, -1) = 0$

$5(x + 3) + 2y - (z - 7) = 0$

$5x + 2y - z = -22$

Ex) $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ $C(c_1, c_2, c_3)$ 한 직선 위에 있지 않은 경우. 세 점 A, B, C에 의해 결정되는 평면의 방정식



$Ex)\, A(0, 0, 1),\, B(2, 0, 0),\, C(0, 3, 0)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

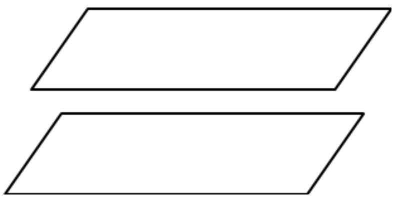
(P는 평면 위의 임의의 점)

Exercise) 평면의 방정식 $Ax+By+Cz=D$. 평면과 평행한 임의의 벡터는 벡터(A, B, C)와 수직임을 보여라.

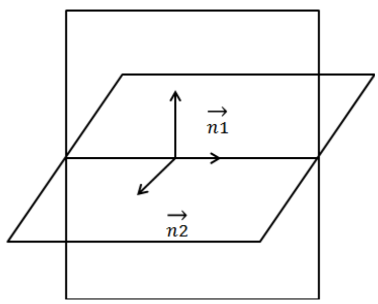
(4) Lines of intersection

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_1}=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{n_2}=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{kn_1}$$



$\overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{kn_1}$



Intersection → line

Q : What is the equation of the line?

$\vec{v} \perp \overrightarrow{n_1}$ and $\vec{v} \perp \overrightarrow{n_2}$, take $\vec{v}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

Ex) Equation of line where $3x-6y-2z=15$ and $2x+y-2z=5$ intersect.

$$\begin{array}{rl} & 3x-6y-2z=15 \\ - | & 2x+y-2z=5 \\ \hline & x-7y \quad =10 \end{array}$$

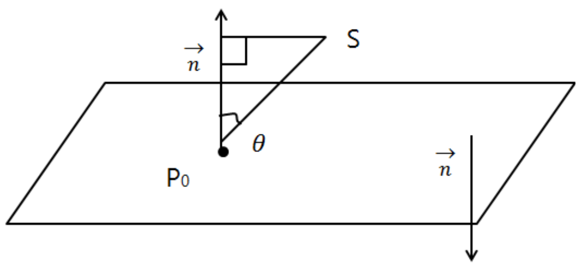
$$y=0 \quad x=10$$
$$3(10)-6(0)-2z=15$$
$$30 - 15 = 2z$$
$$z = \frac{15}{2}$$

$y=t \qquad x=10+7t$

$$\begin{aligned} z &= \frac{3x-6y-15}{2} \\ &= \frac{1}{2}(30+21t-6t-15) \\ &= \frac{15}{2}+\frac{15}{2}t \end{aligned}$$

$$\left(7,1,\frac{15}{2}\right) \quad // (14,2,15)$$

(5) Distance from a point to plane



Distance $=|\overrightarrow{P_0S}||\cos\theta| = |\overrightarrow{P_0S}|\left|\frac{(\overrightarrow{P_0S}\cdot \vec{n})}{|\overrightarrow{P_0S}||\vec{n}|}\right| = \frac{|\overrightarrow{P_0S}\cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

normal vector의 방향에 따라서 $\cos\theta$의 부호가 음수가 될 수 있다.

Ex) Distance from $S(1,1,3)$ to plane $3x+2y+6z=6$

Take P_0 of the plane $(0,0,1)$

$\overrightarrow{P_0S}=(1,1,3)-(0,0,1)=(1,1,2)$

$\vec{n}=(3,2,6)$

$\overrightarrow{P_0S}\cdot \vec{n}=3+2+12=17$

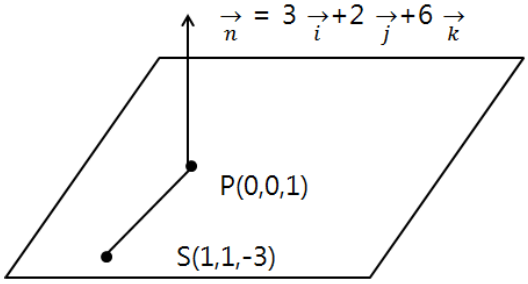
Distance $= \frac{17}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{17}{7}$

예제) normal vector의 방향이 벡터 PS와 반대인 경우

평면 밖의 점이 $S(1,1,-3)$인 경우

$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{n} < 0$

take $\overrightarrow{PS} \cdot (-\vec{n}) = |\overrightarrow{PS} \cdot \vec{n}|$



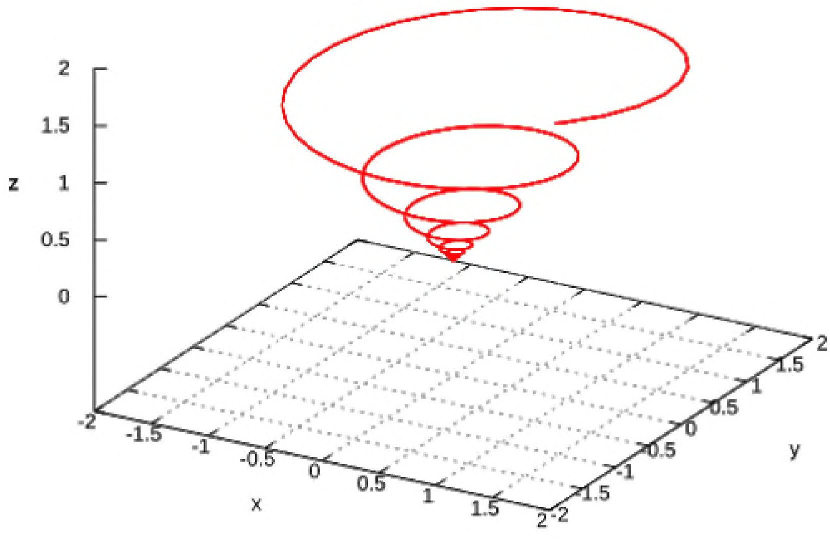
---

2. 공간 상에서 직선에서 곡선으로

곡선을 다루기 위해서는 곡선에 대한 적당한 표현이 있어야 함

곡선을 어떤 입자가 움직인 자취로 이해함.

곡선의 모양뿐 아니라 입자가 얼마나 빨리 움직이는지 즉, 속도나 가속도 같은 동적인 개념들까지 표현하기 위해서는 매개변수식을 쓴다.



자연수 n에 대해, n-차원 공간 속에서 움직이고 있는 입자의 시간 t일 때의 위치를

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \ , \ t \in I \subseteq R$$

라고 하자.

이 때 성분 $x_i(t)$는 실수값을 갖는 함수 ($x_i : I \to R$) 이고 t를 **매개변수**(parameter)라고 한다.

모든 성분 $x_i(t)$가 연속함수이면 $C := \{\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) : \mathrm{t} \in \mathrm{I}\}$를 매개화된 곡선(parametrized curve) 이라고 하며, 곡선의 일부를 **호(arc)**라고 한다.

$\vec{r}(t)$를 곡선 C의 **매개 변수식** 혹은 **매개화** (parametrization)라고 한다.

이는 곡선을 함수 $r : I \to \mathbb{R}^n$ 의 상(image)으로 표현한 것

예제. 원 $x^2 + y^2 = 1$을 매개변수식으로 나타내는 방법은 여러 가지가 있다.

실수 t 에 대하여 $r(t) = (\cos t, \sin t)$, 대표적 방법

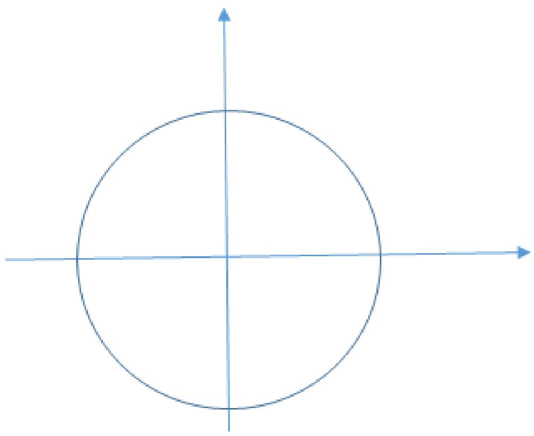
$r_1(t) = (\cos t, -\sin t)$,

$r_2(t) = (\cos 2t, -\sin 2t)$ 도 원에 대한 매개화.

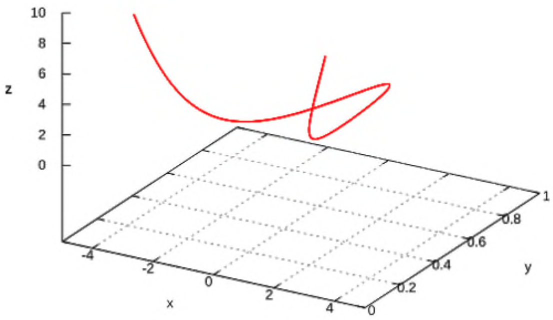
매개변수식을 시간 t 일 때 입자의 위치로 보면

$r(t)$는 반시계 방향,

$r_1(t)$, $r_2(t)$는 시계방향으로 움직이며, $r_2(t)$는 $r(t)$나 $r_1(t)$에 비해 두 배 빨리 움직이는 것을 나타낸다.



3. Vector valued function의 미분



곡선 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\quad a \le t \le b$ (매개화식 parametrization of curve)

Question 공간 속에서 움직이는 입자의 속도를 어떻게 식으로 표현할 것인가?

벡터를 함수값으로 갖는 함수 $r : I \to R^n,\ r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ t \in I \subseteq R$ 를 **벡터 함수**라고 부르자.

(벡터 함수의 극한)

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{L}$$

<=> $|\vec{r}(t) - \vec{L}| \to 0$ as t -> a

<=> $|r_j(t) - L_j| \to 0$ as t -> a for all j

보기 $\lim_{t \to \pi/4} (\cos t, \sin t, t) = (\cos \pi/4, \sin \pi/4, \pi/4)$

정의 $\vec{r}(t)$는 t=a에서 연속이다 <=> $\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

(벡터 함수의 미분)

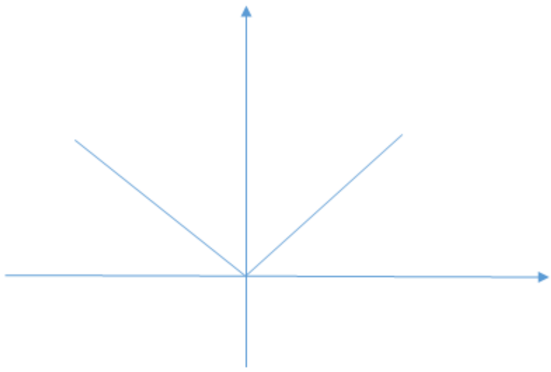
$r(t)$의 모든 성분 $x_i(t)$가 미분가능하면 $r(t)$도 미분가능하다

$$\begin{aligned} r'(t) &= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{r(t + \triangle t) - r(t)}{\triangle t} \\ &= (\lim_{\triangle t \to 0} \frac{x_1(t + \triangle t) - x_1(t)}{\triangle t}, \ldots, \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x_n(t + \triangle t) - x_n(t)}{\triangle t}) \\ &= (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \end{aligned}$$

연습. $\vec{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} - \sin t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 일 때 $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (\frac{d}{dt}cost, \frac{d}{dt}(-\sin t), \frac{d}{dt}t)$

보기 $\vec{r}(t) = (t, |t|)$는 t=0에서 미분가능하지 않다.

이 식으로 매개화 되는 곡선은 (0,0)에서 미분가능하지 않은 곡선이다.



벡터 함수의 미분규칙

(1) 실수값을 갖는 함수 f를 벡터함수에 곱한 것의 미분:

$(f\vec{r})'(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}\,'(t)$

(2) $(\vec{p}(t) \pm \vec{r}(t))' = \vec{p}'(t) \pm \vec{r}'(t)$

(3) 두 벡터함수의 내적의 미분: $(p(t)\cdot\ r(t))' = p'(t)\cdot\ r(t) + p(t)\cdot\ r'(t)$

(4) 두 벡터함수의 외적의 미분: $(p(t) \times r(t))' = p'(t) \times r(t) + p(t) \times r'(t)$

(5) $\dfrac{d}{dt}\vec{r}(\alpha(t)) = \alpha'(t)\vec{r}'(\alpha(t))$

(3)의 경우 $p(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $r(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ 로 두면

$$(p \times r)'$$
$$= \left(\frac{d}{dt}(x_2(t)y_3(t) - x_3(t)y_2(t)), \frac{d}{dt}(x_3(t)y_1(t) - x_1(t)y_3(t)), \frac{d}{dt}(x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t))\right)$$
$$= p' \times r + p \times r'$$

보기 $\vec{r}(t) = (e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t) = e^{2t}(\cos t, \sin t)$

$\vec{r}'(t) = (e^{2t})'(\cos t, \sin t) + e^{2t}(-\sin t, \cos t)$

정의.

(1) 함수 $r : I \to R^n$, $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I \subseteq R$ 의 미분 $r'(t)$를 속도(velocity) 혹은

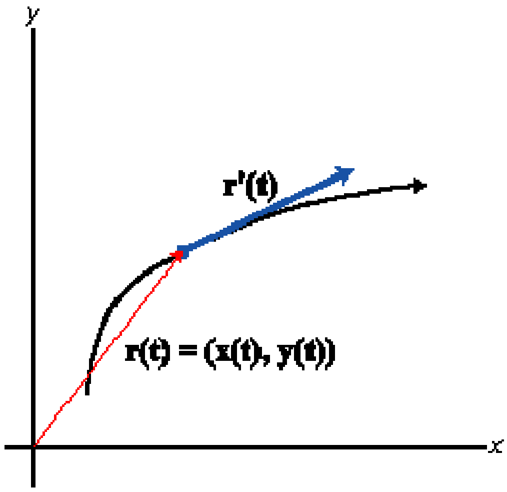
접벡터(tangent vector)라고 한다.

$r(t)$가 위치를 의미한다면 위치의 순간변화율 $r'(t)$를 속도라고 부르는 것은 자연스러울 것이다.

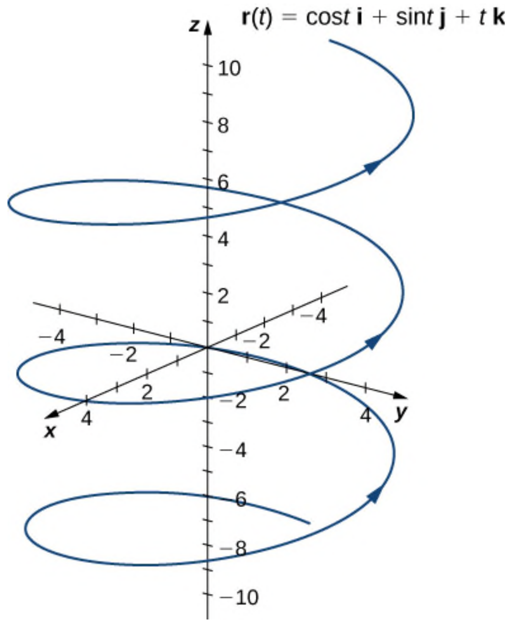
(2) 속도의 크기 $|r'(t)|$를 속력(speed)이라고 한다.

(3) 속도 벡터의 미분 $r''(t)$를 가속도(acceleration)라고 한다.

(4) 곡선상의 한 점 $r(t_0)$를 지나고 $r'(t_0)$에 평행한 직선을 점 $r(t_0)$에서의 곡선의 **접선** (tangent line)이라고 부른다.



보기. $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 3차원 나선(helix)



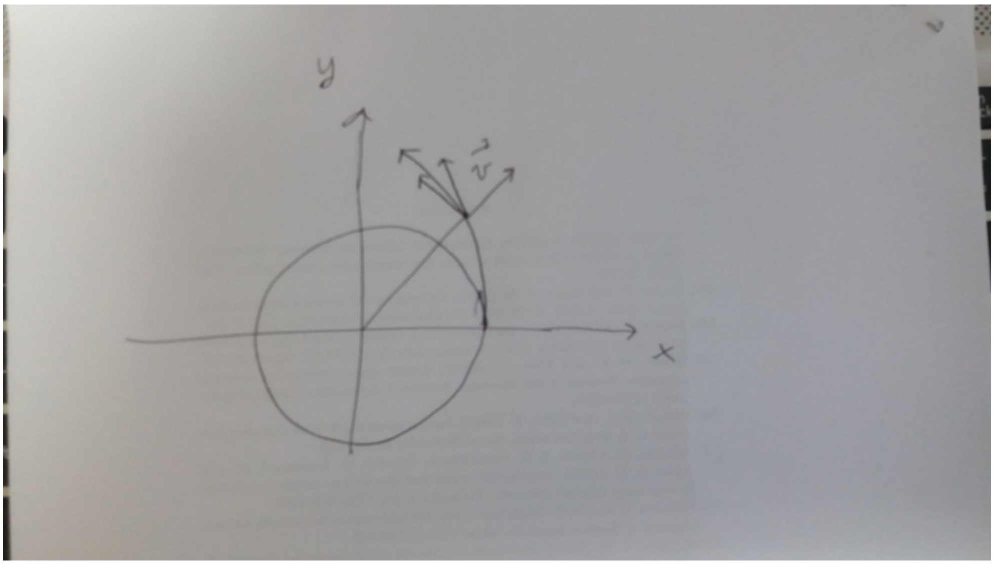
$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ 이다.

속력은 $|r'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$

가속도는 $\vec{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -(\cos t, \sin t, 0)$

보기 $\vec{r}(t) = (e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t) = e^{2t}(\cos t, \sin t)$ outward spiral curve

$\vec{r}'(t) = (e^{2t})'(\cos t, \sin t) + e^{2t}(-\sin t, \cos t)$: 속도 벡터



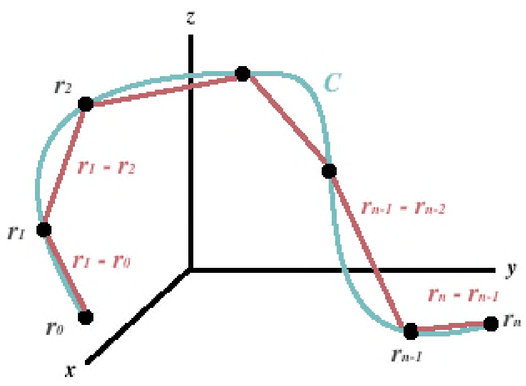
속도벡터는 회전운동을 나타내는 속도벡터와 radial 방향의 직선운동을 나타내는 속도벡터의 합으로 표현된다. (두 벡터로 분해할 수 있다)

----

4. 곡선의 길이 (arc length)

$\vec{r}(t)\,(a \le t \le b)$

곡선을 잘게 잘라서 직선으로 근사시켜 보자. 곡선을 자를 때 구간 $[a,b]$를 다음과 같이 나누어 해당 되는 점으로 자른다. $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.



The sum of the lengths of the vectors $r_i - t_{i-1}$ approximate the length of C.

$|r(t_1)-r(t_0)|+|r(t_2)-r(t_1)|+\cdots+|r(t_n)-r(t_{n-1})|=\sum_{j=1}^{n}|r(t_j)-r(t_{n-1})|$ 이 그 근사값이다.

한편, 평균값 정리를 함수 $x_k(t)$ ($t_{j-1} \le t \le t_j$)에 적용하면

$|r(t_j)-r(t_{j-1})|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k(t_j)-x_k(t_{j-1}))^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k{}'(t_j^k)(t_j-t_{j-1}))^2}$

인 점 $t_j^k \in (t_{j-1},t_j)$들이 있다.

$\triangle t_j = t_j - t_{j-1}$ 로 둔다.

만약 $r'(t)$가 연속함수이면 $\triangle t_j \to 0$ 일 때 적당한 $t_j^* \in (t_{j-1},t_j)$에 대해

$|r(t_j)-r(t_{j-1})| \approx \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x'_k(t_j^*))^2}\ \Delta t_j \approx |r'(t_j^*)|\Delta t_j$

이다.

따라서 곡선의 길이를

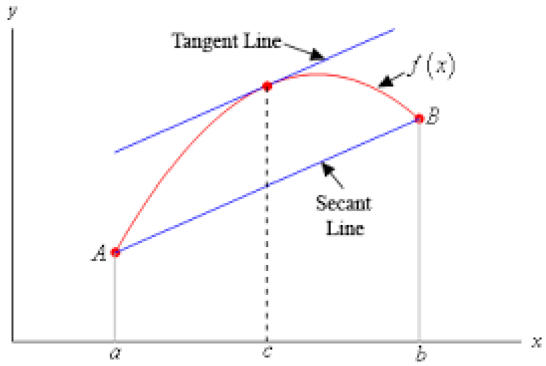
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|r'(t_j^*)|\Delta t_j=\int_a^b|r'(t)|dt$$

로 정의한다.

평균값 정리

함수 f가 [a, b]에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능하면 (a,b)에 어떤 수 c가 존재해서

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 가 된다.

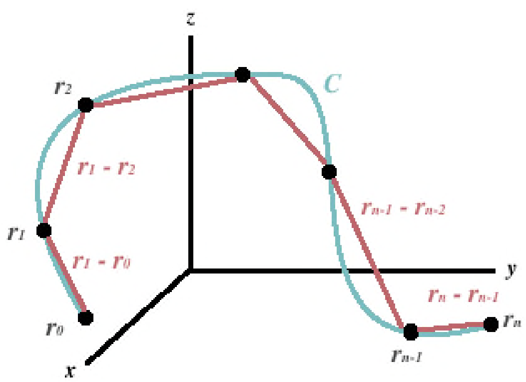


5. 곡선의 길이

곡선의 매개변수식이 $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),\ a \le t \le b$로 주어졌을 때 곡선의 길이는

$$\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}\, dt$$

로 주어진다.



The sum of the lengths of the vectors r_i - t_{i-1} approximate the length of C.

<u>운동하는 입자의 speed를 시간에 대해 적분한 것은 입자의 총 이동거리이다. 이것은 입자의 운동 궤적의 총길이 즉 곡선의 길이와 같다.</u>

보기. 나선 $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$ 의 길이는 $r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ 이므로 $\int_0^{2\pi} |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

보기. 사이클로이드(cycloid)는 매개변수식이 $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ 로 주어지는 곡선이다. 사이클로이드의 한 호의 길이를 구하여라.

풀이. 한 호는 $0 \leq t \leq 2\pi$ 인 구간이다. 따라서 한 호의 길이는

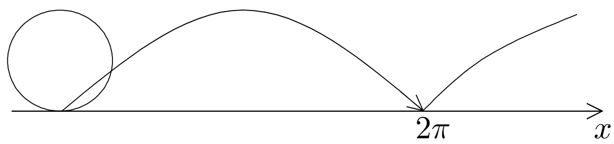
$$\int_0^{2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos^2 t) + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos t}\,dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt = -4\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = (-4)(\cos \pi - \cos 0) = 8$$

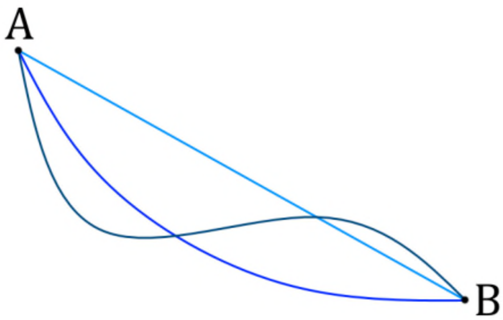
이다.

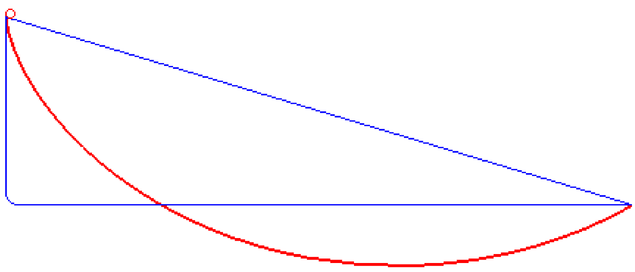


cycloid는 수학사에서 아주 흥미로운 곡선

최단 시간 강하곡선(branchistochrone) 문제의 해

A에서 B까지 경로를 만들었을 때 A에서 출발한 공이 중력에 의해서 B까지 갈 때 어떤 경로가 최단 시간 이동 경로일까? (요한 베르누이의 질문 1696)





해답은 cycloid를 뒤집어 놓은 곡선이다.

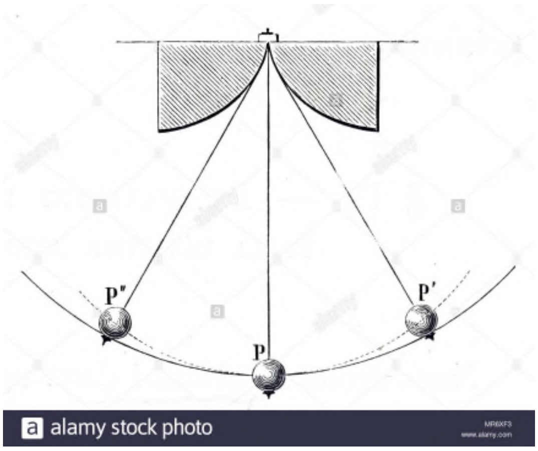
베르누이가 과학 잡지에 문제를 냈을 때 5명의 수학자가 풀이를 보내왔는데 그 중에는 라이프니츠, 뉴턴, 로피탈 같은 수학자들이 있었다. 베르누이는 5명의 풀이 모두를 잡지에 게재했다고 한다.

사이클로이드라는 이름은 갈릴레오 갈릴레이가 처음으로 붙임. 원이 굴러가면서 생기는

궤적이라는 뜻.

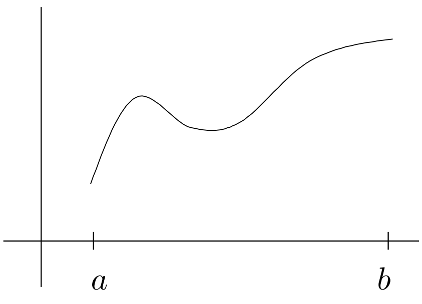
수학사가 칼 보이어는 사이클로이드를 ‘기하학자들의 헬렌’이라고 부름.

하위언스(Hyugens)의 진자 시계. 진폭과 관계없이 주기가 일정한 시계



보기. 미분가능한 함수 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$의 그래프로 주어진 곡선의 길이

풀이. 이 곡선은 매개변수x에 대한 매개변수식 $r(x)=(x,f(x))$ 로 표현할 수 있다. 따라서 $r'(x)=(1,f'(x))$ 이므로 길이는 $\int_a^b |r'(x)|dx=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ 이다.



보기. 극좌표로 $r=f(\theta)$, $a\leqq\ \theta\leqq\ b$ 인 곡선의 길이를 구하여 보자.

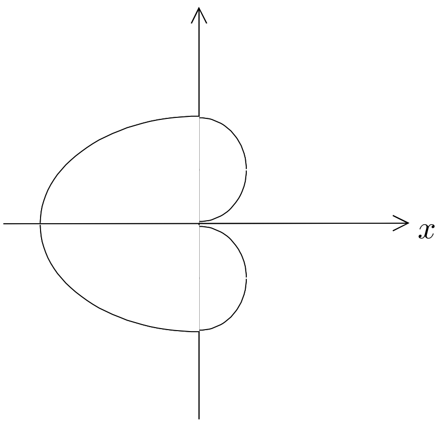
풀이: $x=rcos\theta,\ y=r\sin\theta$ 이므로 $x=rcos\theta=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$ 이고
곡선의 매개변수식은 $(x(\theta),y(\theta))=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta)$ 로 나타낼 수 있다.
곡선의 속도는 $(x'(\theta),y'(\theta))=(r'\cos\theta-r\sin\theta,r'\sin\theta+r\cos\theta)$ 이다.

그러므로 곡선의 길이는

$$\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,d\theta=\int_a^b\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_a^b\sqrt{f^2+(f')^2}\,d\theta$$ 이다.

여기서 $(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2=(r')^2+r^2$

보기. 극좌표로 $r=f(\theta)=1-\cos\theta$, $0\leqq\ \theta\leqq\ 2\pi$인 곡선의 길이를 구하여라.



풀이. 위의 보기에 의하면 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}\ \ d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}\ \ d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\ d\theta=2\int_0^{2\pi}|\sin\frac{\theta}{2}|\ d\theta=8$$

이다.

----

6. 곡선의 재매개화(reparametrization)

주어진 곡선에 대한 매개변수식(parametrization)은 유일하지 않다. 곡선 상에서 입자가 이동하는 방식은 다양하다.

Question) 곡선의 기하학적인 속성을 공부하기 위해 가장 좋은 매개화는 무엇인가? (어떤 매개화를 사용하느냐에 따라 문제를 다루기가 훨씬 간단해질 수 있다)

두 매개변수식 $r(t)$ 와 $r_1(s)$ 사이에 다음과 같은 관계가 있을 때 하나를 다른 하나의 **재매개화(reparametrization)**라고 한다:

$r: I=[a,b] \rightarrow R^n$, $r_1: J=[c,d] \rightarrow R^n$ 에 대해 다음 성질을 만족하는 함수 $g: J \rightarrow I$, $t=g(s)$ 가 존재한다.

(1) g의 역함수가 존재한다.

(2) $r_1 = r \circ g$ 이다.

보기

$r:[0,1] \rightarrow R^2,\ r(t)=(\cos 2\pi t^2, \sin 2\pi t^2)$

$\tilde{r}:[0,1] \rightarrow R^2,\ \tilde{r}(s)=(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$

단위 원에 대한 매개변수식

변환식 t= g(s). $r(g(s))=(\cos 2\pi g(s)^2, \sin 2\pi g(s)^2)=(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)=\tilde{r}(s)$

=> $g(s)^2 = s \Rightarrow g(s)=\sqrt{s}$

$g:[0,1] \rightarrow [0,1]$

재매개화 가운데 가장 많이 쓰는 것은 호의 길이로 매개화 (arc length parametrization)하는 것이다.

* 이는 속력이 항상 1(즉, 단위길이=단위 시간)이 되게 하는 매개변수식이다

$r(t)$ $\quad t \in [a,b]$ (속도가 연속이며 0이 되는 점이 없는 매개변수식) 에 대해

$$s = f(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(u)| du$$

로 둔다.

만약 호의 길이를 정하는 기준점 t_0 는 $[a,b]$에서 임의로 선택해도 좋으나 대개 0이 구간 안에 포함되면 0으로 둔다.

$\frac{ds}{dt} = |r'(t)| > 0$ 이므로 f의 역함수가 존재한다.

f의 역함수를 g로 두면 $t = g(s)$ 이고 $r \circ g$ 는 r의 재매개화이다.

(=> arc length parametrization 호의 길이로 재매개화)

이 때 s를 **호의 길이 매개변수(arc length parameter)**라고 한다.

$\tilde{r}(s) = r(g(s))$의 속력은?

$$\frac{d(r \circ g)(s)}{ds} = \frac{dr(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dr(t)}{dt}\frac{1}{|r'(t)|}$$

이므로 이 벡터의 크기는 항상 1이다. (dt/ds = 1 /(ds/dt)

=> 호의 길이로 재매개화하면 속력이 1이다. (=> 이 경우에는 속도 벡터의 방향의 변화만 공부하면 된다. 속도 벡터의 크기가 1이기 때문에)

보기: 나선 $r(t) = (acost, asint, bt)$를 호의 길이로 재매개화하여라. (a, b >0)

풀이. $|r'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} =: c$ 로 두자. $s = f(t) = \int_0^t |r'(u)| du = ct$ 이다. 따라서 $t = \frac{s}{c}$로 대체하면 $\tilde{r}(s) = r(\frac{s}{c}) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s)$ 로서 호의 길이 s로 재매개화한 식을 얻는다.

*속력이 1인지 확인하여 보아라.

보기: 로그와선 $r(t) = e^t(\cos t, \sin t)$를 호의 길이로 재매개화하여 보자.

풀이: $r'(t) = e^t(\cos t, \sin t) + e^t(-\sin t, \cos t)$, $|r'(t)| = \sqrt{2}e^t$ 로부터

$s = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^t$, 즉, $e^t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ 이 되고, 따라서

$$r_1(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}(\cos\ln(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin\ln(\frac{s}{\sqrt{2}}))$$

이다.