Module Curvature of curves

1. 곡선의 곡률(curvature) (교과서 모듈 31)

Question 곡선이 얼마나 굽어 있는지를 정량적으로 설명할 수 있는가?

(IDEA) 곡선의 스피드가 1이 되도록 재매개화 하면 속도 벡터는 방향에 대한 정보만 가지고 있다. 속도 벡터의 변화를 측정함으로 방향이 얼마나 급격하게 변하는지 설명

곡선 C 의 매개변수식이 $r(t)$일 때 $T=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$를 단위접선벡터(unit tangent vector)라고 한다.

s 를 호의 길이를 나타내는 매개변수라고 할 때 C 위의 한 점에서의 **곡률(curvature)**은 $\kappa=\left|\dfrac{dT}{ds}\right|$ 로 정의한다. (greek alphabet kappa)

($s(t)=\displaystyle\int_0^t|\vec{r}'(u)|du$)

의미) 곡선 위에서 호의 길이 s만큼 이동할 때 방향 벡터 T가 얼마나 급격하게 변하는지를 잰다. 호의 길이를 나타내는 변수 s는 곡선 자체의 기하학적인 속성에만 의존한다. 곡선이 휘어진 정도를 설명할 때 곡선 위를 입자가 운동하는 방식에 의존하지 않도록 하는 법.

(계산법) 곡선의 매개변수식이 $\vec{r}(t)$로 주어졌을 때
t=t(s) <= s=s(t)의 역함수 T=T(t) = T(t(s))
(dt/ds = 1 /(ds/dt) 역함수의 미분은 원래 함수의 미분의 역수)

$$\kappa=\left|\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}\right|=\frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{dT}{dt}\right|=\frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{dT}{dt}\right|$$

여기서 속도벡터 $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$이고 단위접선벡터 $T=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

보기. 직선의 곡률 구하기
풀이. 점 P를 지나고 벡터 a와 평행한 직선의 매개변수식은 $\vec{r}(t)=\vec{p}+t\vec{a}$ 로 나타낼 수 있다. $\vec{r}'(t)=\vec{a}$ 이므로 $T=\dfrac{a}{|a|}$ 로서 상수이고 따라서 $\dfrac{dT}{dt}=0$, 즉, $\kappa=0$ 이다.

보기: 반지름 $a>0$인 원의 곡률을 구하여라.

풀이. 원의 매개변수식을 $X(\theta)=(a\cos\theta, a\sin\theta)$ 로 두면 $X'(\theta)=(-a\sin\theta, a\cos\theta)$

$$T=\frac{X'(\theta)}{|X'(\theta)|}=\frac{1}{a}(-a\sin\theta, a\cos\theta)=(-\sin\theta, \cos\theta) \quad ,$$

$$\frac{dT}{d\theta}=(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

이므로 곡률은 $\kappa=\frac{1}{|X'(\theta)|}\left|\frac{dT}{d\theta}\right|=\frac{1}{a}$ 로서 반지름의 역수이다.

보기. 나선(helix) $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 을 호의 길이로 재매개화한 다음 한 점에서의 곡률을 구하여라.

풀이. $s(t)=\int_0^t |r'(u)|du=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,t$ 이므로 $t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

편의상 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 로 두자.

$r_1(s)=r\left(\frac{s}{c}\right)=(a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c)$ (<=호의 길이로 재매개화)

$$T=\overrightarrow{r_1}'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right)$$

$$\frac{dT}{ds}=\left(\frac{-a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right) ,$$

$$\kappa=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{|a|}{c^2}=\frac{|a|}{a^2+b^2}$$

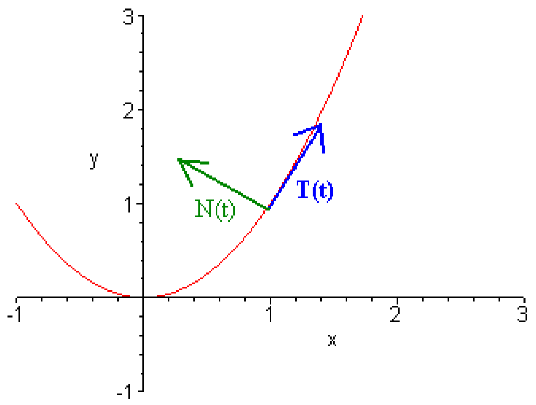
----

2. 접촉원 (osculating circle)

곡선이 휘어진 방향을 나타내는 벡터 도입

정의) 곡률이 0이 아닌 점에서 **단위법선벡터(unit normal vector)**는 다음과 같이 정의한다.

$$N=\frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$$



(매개변수식 $\vec{r}(t)$를 이용하여 N을 구하는 법)

$$\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\vec{v}|}\frac{dT}{dt}$$

N은 $\frac{dT}{ds}$ 방향의 길이가 1인 벡터 $\frac{dT}{dt}$와 $\frac{dT}{ds}$는 방향이 같은 벡터이므로 $N=\frac{dT}{dt}/\left|\frac{dT}{dt}\right|$

보기 원의 매개변수식 $\vec{r}(t)=(\cos(at),\sin(at))$ (a>0)을 이용하여 단위법선벡터 N을 구할 것

$$\vec{r}'(t)=(-a\sin at, a\cos at)$$

$$T=(-\sin at,\cos at)$$

$$\frac{dT}{dt}=(-a\cos at,-a\sin at)$$

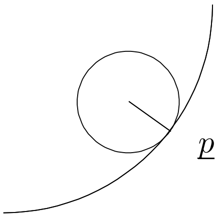
$$N=-(\cos at,\sin at)=-\vec{r}(t)$$

원의 중심을 향하는 방향

----

3. 곡률원 (circle of curvature)

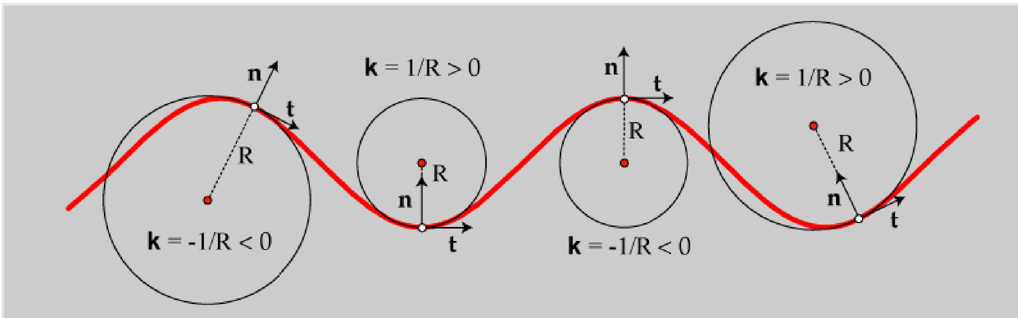
곡선의 한 점에 접하는 원(곡선의 접선과 원의 접선이 일치)으로서 구부러진 안쪽에 있으면서 접점에서 곡선의 곡률과 같은 곡률을 갖는 원을 접촉원(osculating circle) 또는 곡률원(circle of curvature)이라고 한다.



(1) 원은 곡선에 접한다.

(2) 접점에서 원의 곡률과 곡선의 곡률이 같다. (원의 곡률은 반지름의 역수이므로 곡선의 곡률을 κ라고 하면 원의 반지름은 $\dfrac{1}{\kappa}$이다.)

(3) 원은 곡선이 휘어진 쪽에 있다. 즉 접점을 P, 원의 중심을 C라고 하면 $\overrightarrow{PC}$는 P에서 곡선의 단위법선벡터 N과 같은 방향이다.



보기. $y = x^2$ 의 그래프 위의 한 점 $(0,0)$에서의 접촉원의 식을 구하여라.

풀이.

곡선 $y = f(x)$의 한점 (x,y)에서의 곡률은 다음 식으로 주어진다.

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$$

(증명은 나중에 함)

곡률은 $\kappa = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$. 원점에서는 곡률이 2=> 접촉원의 반지름은 1/2

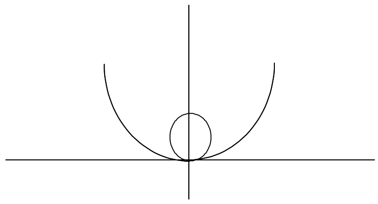
$\vec{r}(x) = (x, x^2)$.

$\vec{r}' = (1, 2x)$ => $T(0) = (1,0)$

(평면 상에 있기 때문에) N은 T와 수직이고 곡선이 휘어진 방향이므로 N= (0,1)

=> 원의 중심은 양의 y축위에 있다.

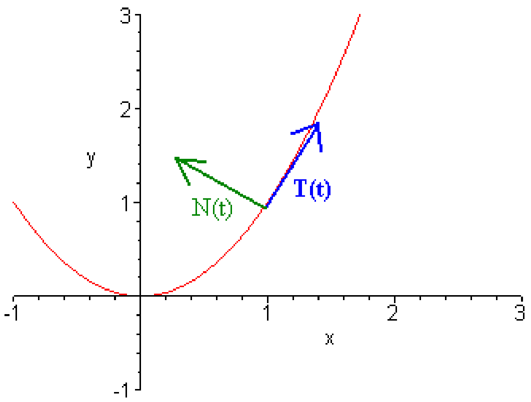
접촉원의 식은 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 이다.



Remark T와 N은 서로 수직이다.

$$T\cdot T=1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(T\cdot T)=2\frac{dT}{ds}\cdot T=0 \Rightarrow N\cdot T=0$$

평면 위에서는 T를 90도 회전함으로써 N을 구할 수 있다. 곡선이 휘어지는 방향을 알면 N을 발견하기 위해 T를 +90도 회전할지 -90도 회전할지 결정할 수 있다.



보기 나선의 단위법선벡터 구하기

나선 $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 위의 점 (0, a, $\frac{\pi}{2}b$)에서 단위 법선벡터

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

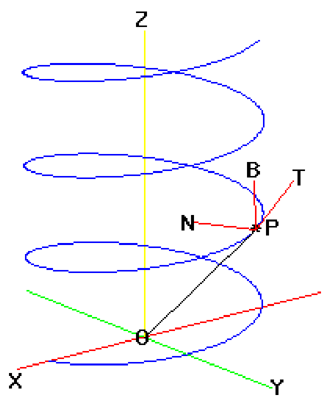
$$T = \frac{1}{c}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c}(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$N = (-\cos t, -\sin t, 0) = -(\cos t, \sin t, 0)$$

=> N은 xy평면에 평행한 벡터이다. z축을 향하는 벡터

N (t=pi/2) = - (0, 1, 0)



3. 가속도(acceleration)에 대한 분석

(가속도) $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{r}''(t)$ (r(t)는 곡선의 매개변수식, 물리적으로는 물체의 위치벡터)

속도 벡터는 운동의 방향 (속도 벡터의 방향)과 스피드 (속도 벡터의 크기) 두 가지 정보를 갖고 있음

=> 속도 벡터의 시간에 대한 미분은 운동의 방향의 변화에 대한 정보와 스피드의 변화에 대한 정보 두 가지를 갖고 있음

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(|\vec{v}|T) = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}T)$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{dt}$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}T + (\frac{ds}{dt})^2\left|\frac{dT}{ds}\right|N$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}T + \kappa(\frac{ds}{dt})^2 N$$

=>

(1) 가속도 벡터는 단위 접선벡터 T와 단위 법선벡터 N이 생성하는 평면 위에 있다.

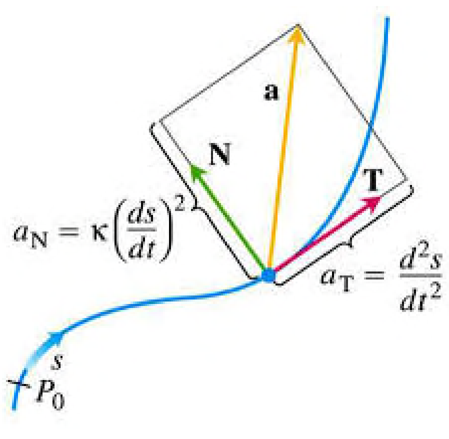
(2) T 방향의 성분은 스피드의 시간에 대한 미분이다

(3) N 방향의 성분 (운동의 방향을 바꾸는 요소를 설명/곡선이 휘는 방향)은 곡률과 스피드의 제곱에 비례한다.

정의) $a_T = \frac{d}{dt}|\vec{v}|$ 가속도의 tangential component

$a_N = \kappa|\vec{v}|^2$ 가속도의 normal component

=> $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\ \vec{a} = a_T^2\, T\cdot\ \ T + a_N^2 N\cdot\ \ N = a_T^2 + a_N^2$



보기) 나선 $\vec{r}(t)=(p\cos t, p\sin t, qt)$의 가속도의 성분 분석

$\vec{v}=\vec{r}'=(-p\sin t, p\cos t, q)$

$\vec{a}=\vec{r}''=(-p\cos t, -p\sin t, 0)$

$a_T=\frac{d}{dt}|\vec{v}|=\frac{d}{dt}\sqrt{p^2+q^2}=0$ => $\vec{a}=a_N N$ = pN

=> (kappa) |v|^2 = a_N = p => (kappa) = p/|v|^2 = p/(p^2 + q^2)

(정리) 곡선의 곡률 $\kappa=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$ (v는 곡선의 속도 벡터, a는 곡선의 가속도 벡터)

(식에 대한 유도)

(관찰) $\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}T+\kappa(\frac{ds}{dt})^2N$

$\vec{v}\times\vec{a}=\vec{v}\times(a_T T+a_N N)=0+a_N\,\vec{v}\times N$

$\vec{v}$와 N은 서로 수직이다. (T와 N이 수직이기 때문에. N은 $\frac{dT}{ds}$와 같은 방향이다)

=> $|\vec{v}\times\vec{a}|=a_N|\vec{v}||N|=a_N|\vec{v}|=\kappa|\vec{v}|^3$

보기)

$\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 위의 공식을 이용하여 곡률을 구해보자

$\vec{v}=\vec{r}'=(-a\sin t, a\cos t, b)$

$\vec{a}=\vec{r}''=(-a\cos t, -a\sin t, 0)$

$\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=ab\sin t\,\vec{i}-ab\cos t\,\vec{j}+a^2\vec{k}$

$|\vec{v}\times\vec{a}|=a\sqrt{a^2+b^2}$

=> $\kappa = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$

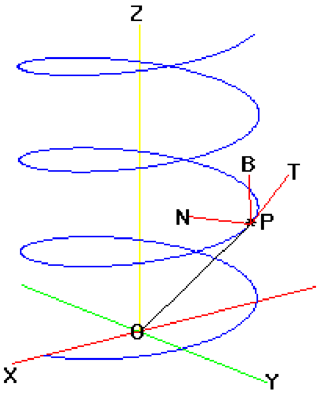
----

4. Binormal vector and torsion

Question 공간 속의 곡선이 평면 위에 놓여 있지 않을 때 한 지점에서 어떻게 평면을 벗어나고 있는 측정할 수 있을까?

정의) binormal vector $B = T \times N$ (=> TNB frame)

보기 나선의 경우



정의) 곡선 상의 한 점 P에서의 T와 N에 의해 결정되는 평면을 곡선의 P에서의 접촉평면(osculating plane)이라고 한다. Binormal vector B는 접촉평면의 법선벡터가 된다.

곡선의 뒤틀림은 접촉평면의 틀어짐, 즉 B의 변화률을 측정함으로서 설명할 수 있다.

$$\frac{dB}{ds} = \frac{d}{ds}(T \times N) = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds}$$

N과 $\frac{dT}{ds}$는 같은 방향의 벡터이므로

$$\frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$

$\frac{dB}{ds}$는 T에 수직이고, B에 수직이므로 $\frac{dB}{ds} = -\tau N$ (dB/ds가 B에 수직인 이유는 |B|=1)

정의) $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$ 를 비틀림(torsion)이라고 부른다.

음의 부호를 붙인 것은 곡선의 진행 방향으로의 비틀림이 양수가 되도록 하기 위해서이다. 평면 위의 곡선의 비틀림은 항상 0이다. 비틀림은 공간 속의 곡선이 평면을 벗어나는 정도를 말해준다.

보기. 나선 $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 위의 한 점 $t = \frac{\pi}{2}$에서의 비틀림(torsion)을 구하여라.

풀이. 앞의 보기에서 호의 길이로 매개화한 식은

$r_1(s) = r\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\left(\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ 이고

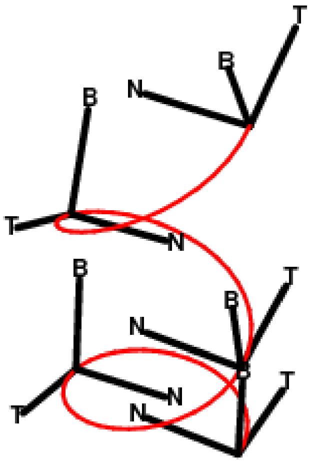
$c = \sqrt{a^2+b^2}$ 로 두면

$$T = \left(-\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right),$$

$$\frac{dT}{ds} = \left(\frac{-a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{|\frac{dT}{ds}|} = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$ 이고 $t = \frac{s}{c} = \frac{\pi}{2}$에서는 $N = (0, -1, 0)$이다.

$B = T \times N = (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, \ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \ \frac{a}{c})$ 이므로 $\frac{dB}{ds} = (\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0)$ 이며 $t = \frac{s}{c} = \frac{\pi}{2}$ 에서는 $\frac{dB}{ds} = (0, \frac{b}{c^2}, 0)$이다. 따라서 $\frac{dB}{ds} \cdot N = -\frac{b}{c^2}$ $\tau = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$이다.


T
B
N
B
T
N
B
T
B
N
T
B
T
N
N
T