Module Complex numbers (basics)

1. 복소수

Question 방정식 $x^2+1=0$의 해는 무엇인가?

방정식 $x^2=2$의 해를 얻기 위하여 무리수가 필요하였다면 이와 비슷하게 간단한 방정식 $x^2=-1$의 해를 위하여 실수의 개념을 확장할 필요가 있었다.

(1)허수단위(imaginary unit)

$i=\sqrt{-1}$은 제곱하면 -1이 되는 하나의 수를 의미하며 허수단위라고 한다. 공학에서는 전류를 나타내는 기호와 구분하기 위하여 i 대신 j 를 사용하기도 한다.

(2)복소수(Complex number)

복소수는 $a+bi$ 꼴의 수이고 여기서 a와 b는 실수이다. 때때로 $a+bi$대신 $a+ib$로 쓰기도 한다. 모든 복소수들의 집합을 C 로 나타낸다. 자연수의 집합을 N, 정수의 집합을 Z, 유리수의 집합을 Q, 실수의 집합을 R로 흔히 나타낸다. 복소수의 집합은

$$C=\{a+bi : a, b\in R\}$$

로 표현할 수 있다.

한 개의 복소수 $z=a+bi$에서 a는 z의 실수부분(real part), b는 z의 허수부분(imaginary part)라고 하며,

$$\mathrm{Re}\, z=a,\ \ \mathrm{Im}\, z=b$$

로 표기한다. $a=0$이면 $0+bi$는 bi로 나타내고 이를 허수(imaginary number)라고 한다. $b=0$이면, $a+0i$는 실수 a이다. 따라서 모든 실수는 복소수의 집합에 들어 있다.

보기 1. $z=3+2i$일 때 $\mathrm{Re}\, z=3$ 이고 $\mathrm{Im}\, z=2$ 이다. $3-5i=3+(-5)i$이다.

(3)복소수의 연산

복소수는 실수처럼 사칙연산, 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기를 할 수 있으며 다음과 같이 정의한다.

임의의 두 복소수를 $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ 로 두자.

(Addition) $z_1 + z_2$로 나타내며

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

(Multiplication) 두 복소수를 곱한 것을 $z_1 z_2$로 표기하며

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_2)i$$

((a+ib)(c+id) =ac+iad + ibc + (i)^2 bd = (ac-bd) + i(ad+bc)

복소수의 나눗셈

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \times \frac{1}{z_1}$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + b_1 i} = \frac{a_1 - b_1 i}{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2} i$$ 이다.

보기 1) $(2+3i)+(4-6i) = 6-3i$

2) $(2+3i)(1-6i) = 20-9i$,

3) $\frac{1}{1-6i} = \frac{1+6i}{(1-6i)(1+6i)} = \frac{1}{37} + \frac{6}{37}i$

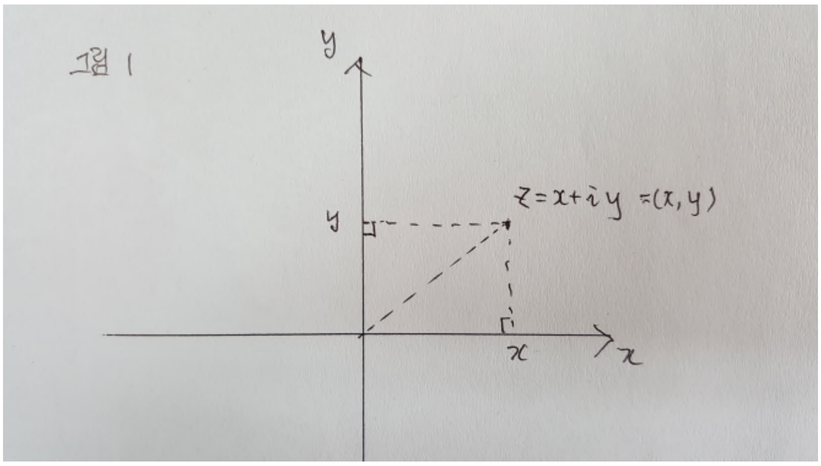
(4) 켤레복소수(conjugate)

복소수의 허수부분의 부호를 바꾼 것을 원래 복소수의 켤레복소수라고 한다. 복소수 $z = a + bi$의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 로 표시하며 $\bar{z} = a - bi$ 이다. 허수부분이 0이면 실수이며 이 때 $z = \bar{z}$ 이다. 역으로 $z = \bar{z}$이면 z는 실수임을 확인할 수 있다. 또한

$z\bar{z} = a^2 + b^2$ 이다.

(5)복소평면(complex plane)

복소수 $z = x + iy$를 (x, y)로 나타내면 R^2의 원소와 일대일대응을 시킬 수 있다. 이를 평면에 직교좌표를 사용하여 나타낸 것을 복소평면이라고 부른다. 이때 수평축은 실수부분을, 수직축은 허수부분을 나타낸다.

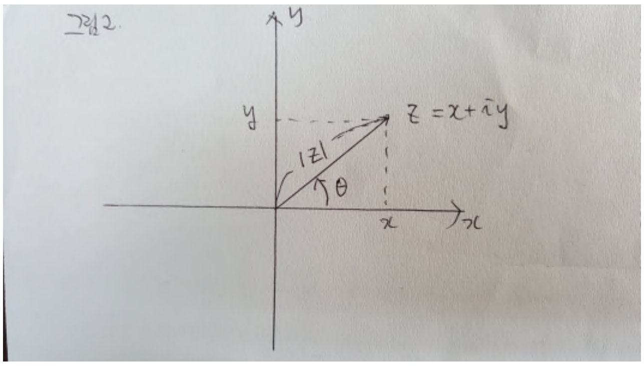


=>z = a+ ib, w= c+id, z+w = (a+c) +i (b+d) =>vector(a,b)와 vector (c, d)의 합으로 이해

복소수의 크기(modulus)는 원점에서 시작하여 (x, y)에서 끝나는 화살표의 길이에 해당하며 $|z|$로 나타내고 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$

$z \neq 0$일 때 이 화살표와 양의 수평축이 이루는 각도를 반시계방향으로 잰 것(그림2 의 θ)을 복소수 z의 편각(argument)이라고 하며 $\arg z$로 나타낸다.

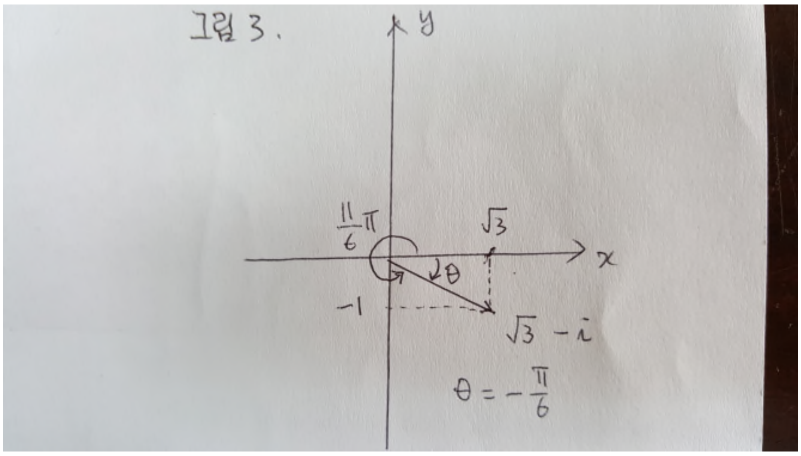


한 바퀴 돌면 같은 점을 가리키게 되므로 편각은 2π에 정수를 곱하여 더한 것으로도 나타낼 수 있어 한 개의 복소수의 편각은 다양하게 나타낼 수 있다.

$\arg z$ 대신 $\operatorname{Arg} z$로 첫 기호를 대문자로 써서 한 가지 방법으로 편각을 나타낸다. 즉, $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ 인 편각을 의미한다. (경우에 따라서는 $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ 를 사용하기도 한다.)

보기

$z=\sqrt{3}-i$ 의 크기 $|z|$는 2이고, 편각 $\arg z=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in Z$, 이다. $\mathrm{Arg}\, z=-\frac{\pi}{6}$ 이다.



(6) 극형식(polar form)과 오일러 공식 (Euler's formula) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

복소수 $z=a+bi$를 크기 ($|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$로 두자)와 편각 ($\arg z=\theta$로 두자)을 이용하여 나타내면 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ 이다. 이렇게 나타낸 것을 복소수의 극형식이라고 한다.

오일러 공식이라 불리는 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 를 이용하면

=> 극형식은 더 간단하게 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$는 공식의 유도

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

=> x에 복소수 $i\theta$를 대입하여 보면 좌변은 $e^{i\theta}$, 우변의 무한급수는

$$1+(i\theta)+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots$$

가 된다. 이 급수에서 홀수 번째 항만을 모으면

$$1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots=\cos\theta$$

짝수 번째 항만을 모으면

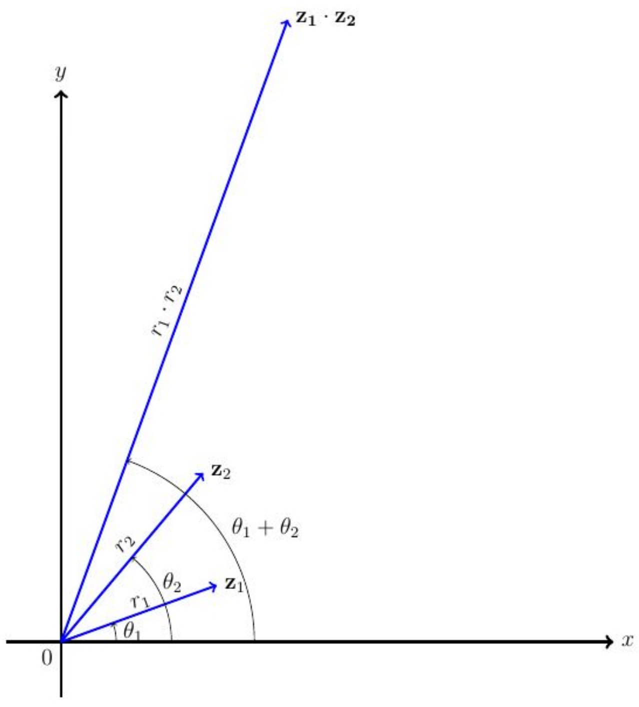
$$i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)=i\sin\theta$$

가 되므로 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 로 정의하는 것이 그럴듯하다.

**두 복소수 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 의 곱과 quotient

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$이고 $z_2 \neq 0$일 때 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

=>곱에 대한 기하학적 해석



*z_1과 $\overline{z_1}$ 는 수평축에 대하여 대칭이므로 $\overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}$ 이고 $\overline{(z_1 z_2)} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$ 인 것도 쉽게

확인할 수 있다.

*정수 n에 대하여 $z_1^n = r_1^n e^{in\theta}$ 으로 복소수의 거듭제곱의 계산도 쉽다.

보기

1) $z = 1 + \sqrt{3}i$ 를 극형식으로 나타내면 $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ 이다.

=> $(1+\sqrt{3}i)^6 = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^6 = 2^6 e^{2\pi i} = 64 \times 1 = 64$이다.

2) $(1+\sqrt{3}i)(1-i) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$. 이로부터 한 가지 재미있는 결과를 얻는다. 양변의 실수부분을 비교하면 $2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{12} = 1 + \sqrt{3}$ 이므로 $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 임을 알 수 있다.