Module Binomial series

Binomial series

1. Binomial series

$f(x) = (1+x)^m, m \neq 0$

m이 양의 정수일 때는 이항전개 (binomial expansion)가 가능 => 다항식

$f(x) = (1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$ 여기서 $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$

m이 유리수라면? m =-1/2 ?

$f(x) = (1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

이런 형태의 함수에 대한 center가 0인 테일러 급수 ?

$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$

$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$

=> $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k$ (called binomial series)

Extended definition of $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$ (여기서 m은 더 이상 자연수가 아님)

수렴반경은?

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\binom{m}{k+1}}{\binom{m}{k}} \right| = \frac{|m-k|}{k+1} \to 1 \, as \, k \to \infty$$

수렴반경 R= $1/\rho$ =1

모든 binomial series는 |x|<1에서 수렴한다.

예제) $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$

Binomial series (즉 f의 center=0에서의 테일러 급수)

=> $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k$

$\binom{1/2}{0}=1$

$\binom{1/2}{1}=1/2$

$\binom{1/2}{2}=\frac{1/2(1/2-1)}{2!}=-\frac{1}{2!\,2^2}$

$\binom{1/2}{3}=\frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!}=\frac{1\cdot\ 3}{3!\,2^3}$

$\binom{1/2}{4}=-\frac{1\cdot\ 3\cdot\ 5}{4!\,2^4}$

=> $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k$ = $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!2^2}x^2+\frac{3}{3!2^3}x^3-\frac{3\cdot\ 5}{4!2^4}x^4+\cdots$

정리. $(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,\quad |x|<1$ (m not= 0)

(증명의 아이디어: 양변이 각각 같은 미분방정식의 초깃값 문제의 해가 됨을 보인다. 미분방정식의 초깃값 문제의 해는 유일하다는 정리의 결과로 두 해는 같다는 결론을 얻음)

2. Application of binomial series

$$f(x)=(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots\ (m-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{m}{n}x^n+\cdots$$

(m not = 0)

Example. Approximate $\sqrt{3}$ with an error < 1/100

step 1) 적당한 함수와 적당한 center 찾기

$\sqrt{1+x}$ 어떻게? (|x|<1)

$\sqrt{3}$ = $\sqrt{4-1}$ ($\sqrt{4}=2$임을 이용)

($\sqrt{x}$ center 4에서의 Taylor series이용 가능)

$$\sqrt{4-1}=\sqrt{4(1-\frac{1}{4})}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$f(x)=2\sqrt{1+x}$

원하는 값은 $f(-1/4)$ => -1/4은 0에 가까운 값이면 거리가 1 이내 => 이항급수 사용 가능

step 2) 선택한 함수의 선택한 center에서의 테일러급수

$$f(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k$$

$$f(-1/4)=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1/4)^k$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+\binom{1/2}{n-1}x^{n-1}+\binom{1/2}{n}x^n+\cdots \right)$$

(n-1)차 근사다항식을 사용할 때 n차 항을 오차항으로 사용할 수 있다.

step 3) 오차항에 대한 평가

$$\left|f(-1/4)-2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{1/2}{k}(-1/4)^k\right| \approx 2\left|\binom{1/2}{n}(-1/4)^n\right|$$

오차에 대한 조건

$$2\left|\binom{1/2}{n}\right|\left(\frac{1}{4^n}\right)<\frac{1}{100}$$

$$=> 4^n/2\left|\binom{1/2}{n}\right|>100$$

n=1 LHS = 8

n=2 LHS = 16 $\times$4 < 100

n=3 LHS = $64\times8>100$

$$\sqrt{3}\approx 2(1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})-\frac{1}{8}(-\frac{1}{4})^2=\frac{111}{64}$$

예제) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 의 center x=0에서의 테일러급수 구하기

$f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$

$(1+t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} t^k$

$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k}$

예제) $\arcsin 0.1 = \sin^{-1} 0.1$ 의 값을 오차 <10^{-4} 범위에서 근사하라.

$\sin^{-1}x$의 center 0에서의 테일러급수 이용

$\sin^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 를 이용

$\sin^{-1}0.1 = \int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{0.1} \sum_{k=0} (-1)^k \binom{-1/2}{k} t^{2k} dt$

= $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \int_0^{0.1} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{(0.1)^{2k+1}}{2k+1}$

(power series가 절대 수렴하는 범위 (|t|<1) 에서 적분과 무한 합을 서로 순서를 바꿀 수 있다)

Error : 급수의 (2n+1)-차항= $|\binom{-1/2}{n} \frac{(0.1)^{2n+1}}{2n+1}| < 10^{-4}$

n=2 => error = $\left|\frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2}\right| \times \frac{1}{5} \times 10^{-5} < 10^{-4}$

근사값 : (n=0) + (n=1) = $0.1 + (0.1)^3/6$